

# MATEMATIIKAN SUULLINEN JA KIRJALLINEN KIELENTÄMINEN OPETUKSEN TUKENA

Emma Mäkelä

Pro gradu -tutkielma  
Toukokuu 2019

MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS  
TURUN YLIOPISTO

Turun yliopiston laatujärjestelmän mukaisesti tämän julkaisun alkuperäisyys on tarkastettu Turnitin OriginalityCheck -järjestelmällä.

Tämän tutkielman tarkoituksena on tarkastella ja esitellä sekä suullista että kirjallista kielentämistä opetuksen apuvälineenä niin peruskoulussa kuin lukiosakin. Tutkielman pääpointtina on myös tarkastella matemaattisen ajattelun ilmaisemista kielentämisen avulla. Tutkielmassa on myös vertailtu kielentämisen hyötyjen matemaattisen ajattelun eri osa-alueiden kehittymisen perusteella.

Tutkielma on kirjallisuuskatsaus, jossa lähteinä on kaikki löydettävissä ja saatavilla olevat aiheeseen liittyvät tutkimukset.

Suurimmaksi hyödyksi matematiikan kielentämisessä nousee ajattelun jäsentäminen ja matemaattisen ymmärryksen syventäminen. Oppilaille on hyödyllistä jäsentellä ajatteluaan ja reflektoida oppimaansa, jolloin esimerkiksi monimutkaisten ja vaikeiden asioiden oppiminen helpottuu. Luokkahuoneissa tapahtuvan keskustelun seurauksena oppilaat saavat tukea ja ideoita toisiltaan jakaessaan omia ajatuksiinsa suullisesti. Vertaisryhmä saa myös uuden mahdollisuuden sisäistää opetettavan asian, kun sitä käsitellään keskustellen opettajajohtaisen opetuksen jälkeen. Kuitenkaan proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon näkökulmasta kielentäminen ei vastaa täysin tyydyttävästi kaikkien hyötyjensä puolesta.

Opettajan näkökulmasta kielentäminen saattaa mahdollistaa pääsyn oppilaiden ymmärryksen syvyyteen ja näin ollen heidän oppimisensa arviointi tehostuu. Arvioinnin lisäksi opettaja saa arvokasta tietoa siitä, miten tiettyjä asioita kannattaa opettaa ja ylipäänsä, mitä asioita oppilaat kokevat vaikeiksi.

Tutkielman perusteella matematiikan kielentäminen voisi olla toimiva työtapo matematiikan tunneilla. Kielentämisen käyttökelpoisuutta opettajan kannattaisi kokeilla omassa luokassaan, sillä siitä voisi saada hyötyä sekä oppilaiden oppimiseen että opettajalle arviointimenetelmäksi ja opetuksen suunnittelun avuksi. Kielentämisen käyttäminen on kuitenkin tilannekohtaista ja sen käyttöä pitää muokata kontekstiin sopivaksi.

Asiasanat: matematiikka, kielentäminen, matematiikan kielentäminen, matemaattisen ajattelun kielentäminen.



# Sisältö

<b>1 Johdanto</b>	<b>2</b>
<b>2 Matemaattinen ajattelu</b>	<b>4</b>
2.1 Matemaattinen ajattelu ja osaaminen . . . . .	5
2.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto ja representaatiot . .	7
2.2.1 Konseptuaalinen tieto . . . . .	7
2.2.2 Proseduraalinen tieto . . . . .	8
2.2.3 Representaatiot . . . . .	8
2.2.4 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhteys . . .	9
<b>3 Matemaattisesta kielestä</b>	<b>10</b>
<b>4 Matematiikan kielentäminen</b>	<b>13</b>
4.1 Mitä matematiikan kielentäminen on? . . . . .	13
4.2 Kielentäminen opetuksen apuna . . . . .	16
4.3 Suullinen kielentäminen . . . . .	17
4.3.1 Vinkkejä suulliseen kielentämiseen matematiikan ope- tuksessa . . . . .	19
4.4 Kirjallinen kielentäminen . . . . .	20
4.4.1 Kirjallisen kielentämisen malleja . . . . .	21
4.5 Esimerkkejä matematiikan kielentämismalleista . . . . .	23
4.5.1 ”Standardi”-malli . . . . .	23
4.5.2 ”Kertomus”-malli . . . . .	23
4.5.3 ”Tiekartta”-malli . . . . .	24
<b>5 Opettajan rooli matematiikan kielentämisessä</b>	<b>24</b>
5.1 Voiko matemaattista ajattelua opettaa? . . . . .	25
<b>6 Oppimisen arviointi matematiikan kielentämisen avulla</b>	<b>26</b>
6.1 Kirjallinen ja suullinen kielentäminen arvioinnin tukena . . . .	27
<b>7 Kielentämisen hyötyjä</b>	<b>28</b>
7.1 Kenelle kielentämisestä on hyötyä? . . . . .	28
7.2 Kielentämisen haasteita . . . . .	29
<b>8 Pohdintaa</b>	<b>31</b>
<b>Lähteet</b>	<b>33</b>

# 1 Johdanto

Monissa kouluissa ajatellaan, että monen vuoden pakollinen matematiikan opetus takaisi olosuhteet, joissa oppilaiden matemaattinen ajattelu kehittyisi. Tämä on usein oletuksena, koska matematiikka nähdään loogisesti kehittyvänä taitona, joka kehittyy niin normaalielämässä kuin koulussakin. Tutkielmassa lähteinä käytettyjen tutkimuksien mukaan koulunsa päättävät oppilaat eivät ole välttämättä kehittyneet matemaattisessa ajattelussa. Monet matematiikan opettamista tutkineet tutkijat ajattelevat syyksi opetuksen liiallista keskittymistä matemaattiseen sisältöön, kun sen sijaan pitäisi korostaa enemmän prosesseja eli mistä on kyse ja miksi matematiikassa tehdään opetetun lailla [2]. Toisaalta ajattelu voidaan käsitteellistää kommunikoinnin osa-alueeksi, kommunikoinniksi itsensä kanssa. Ajattelumme on dialoginen prosessi, jolla me informoimme itseämme, argumentoimme, kysymme kysymyksiä ja odotamme omia vastauksiamme [30]. Burton pohtii artikkelissaan myös, voiko matemaattista ajattelua opettaa. Sitä pohditaan myös tässä tutkielmassa.

Perinteisessä peruskoulun oppilaan tai lukiolaisen matematiikan vihkossa näkyy todella vähän kirjoitettua tekstiä verrattuna muiden oppiaineiden vihkoihin. Lasku kirjataan näkyviin matemaattisin symbolein, ja vaikka matemaattista ajattelua tarvitaan tehtävää ratkaistaessa, vihkoon kirjataan vain lasku ja siitä saatu tulos. Tehtävää tarkistaessa tehtävän oikeellisuuden määrää kuitenkin tulos, jolloin oppilaat kokevat, että ajatteluprosessin kuvaamista ei tarvita. Tarkastajan olisi kuitenkin tärkeää tietää, miten tulokseen on päädytty, jotta oppilaan ymmärrys aiheesta tulisi ilmi. Näin tarkastaja voisi selvittää virheellisiä käsityksiä uudelleen ja saada tietoa oppilaille hankalista aiheista sekä niihin liittyvistä opetustyyleistä.

Matematiikan kielentämisen lähtökohdista on tehty lukuisia opetuskokeiluja Suomessa, lähes kaikilla koulutustasoilla esiopetuksesta yliopistoon, vaikka se on melko uusi tutkimusaihe [10]. Näillä kaikilla koulutustasoilla matematiikan opiskelu voidaan nähdä sosiaalisena prosessina, jossa luonnollinen kieli on tärkeää kuviokielen, taktiilisen toiminnan kielen ja matematiikan symbolikielen kanssa [10, 32]. Matemaattisiin käsitteisiin ja algoritmeihin voidaan joustavasti yhdistää luonnollista kieltä, kuviokieltä ja matematiikan symbolikieltä opitunneilla.

Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun esittämistä ja ilmaisemista kielen avulla joko suullisesti tai kirjallisesti. Kielen avulla oppilaiden oma matemaattinen ajattelu näkyy muille oppilaille sekä opettajalle. Kielentämisen avulla siis voidaan nähdä oppilaan matemaattinen ymmärrys ja sen kehittyminen tietystä käsiteltävässä aiheessa. Opettajalle kielentäminen toimii pohjana oppimisen arvioinnille sekä opetuksen suunnit-

telulle. Matemaattisella ajattelulla tarkoitetaan tässä työssä matemaattisen tiedon, konseptuaalisen ja proseduraalisen, prosessointia. [11, 31]

Valtakunnallisella tasolla on myös kiinnitetty huomiota oppilaiden monipuoliseen ilmaisuun matematiikassa. Perusopetuksen opetussuunnitelmassa [24] yleisesti kaiken oppimisen kerrotaan tapahtuvan vuorovaikutuksessa toisten oppilaiden, opettajan ja muiden aikuisten kanssa. Yhdessä oppimisen kerrotaan edistävän oppilaiden luovan ja kriittisen ajattelun sekä ongelmanratkaisun taitoja. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa matematiikan opetuksen tehtävänä on kehittää oppilaiden loogista, täsmällistä ja luovaa matemaattista ajattelua. Opetussuunnitelma korostaa myös taitoa perustella sekä kykyä tulkita ja tuottaa matemaattista tekstiä. Kielentämisen kautta ajattelu ja sen kehittyminen voidaan saada havaittua paremmin kuin ilman kielen käyttöä apuna. Myös keskustelun ja yhteistyötaitojen tärkeyttä korostetaan perusopetuksen opetussuunnitelmassa. Suullisen kielentämisen kautta tapahtuva keskusteleminen on matematiikassa lähes tärkein pointti, joten sen avulla päästään myös tähän opetussuunnitelman tavoitteeseen. [24]

Lukion opetussuunnitelmassa 2015 matematiikan opetuksen yleisissä tavoitteissa matematiikan tehtävä on opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä sekä kehittää laskemisen, ilmiöiden mallintamisen ja ongelmien ratkaisemisen taitoja [25].

Kuten ylläolevista voidaan päätellä, oppilailta ja opiskelijoilta edellytetään matemaattisen kielentämisen taitoa. Opetussuunnitelma korostaa myös matematiikan luonteen ymmärtämistä. Oppimansa soveltamisen osaaminen on myös pääpointtina matematiikan opetussuunnitelmassa. Matematiikan opetusta tulisi siis mahdollisesti kehittää soveltavampaan suuntaan ja ongelmanratkaisutaitoja enemmän harjaannuttavaan. [25] Matematiikan opetus on muutoksen edessä tietotekniikan kehittyessä ja vallatessa yhä enemmän matematiikkaa. Laskimilla ja laskinohjelmistoilla voi yhä enemmän laskea laskuja täysin ymmärtämättä, mitä laskussa edes tapahtuu. Tällöin tehtävien ratkaisuisa tulisi näkyä myös ajatusprosessi, jolla laskutoimitukseen ja ratkaisuun on päädytty. Viimeistään ylioppilaskirjoituksissa vastaajalta edellytetään vastausta, jonka ulkopuolinen matematiikkaa osaava lukija pystyy ymmärtämään. Ylioppilastutkintolautakunta korostaa matematiikan hyvän vastauksen piirteissä syksyllä 2018 välivaiheita ja riittäviä perusteluja. Vastauksesta tulee selvitä, miten ratkaisuun on päädytty.[35] Tähän tarvitaan matematiikan kielen lisäksi luonnollista kieltä ja mahdollisesti kuvioita. [11]

Suullinen kielentäminen on laajemmin käytössä jo kouluissa, varsinkin opettajien toimintatavoissa. He tuovat esiin matemaattista ajatteluaan opettaessaan matematiikan aiheita sekä selittäessään tehtäviä ja niiden ratkaisutapoja. Kirjallinen kielentäminen ei ole niin laajasti tunnettu työskentelytapa, ja se vaatiikin hieman enemmän etukäteissuunnittelua ja aikaa opettajil-

ta.

Tässä tutkielmassa on esitelty sekä suullista että kirjallista kielentämistä ja niiden hyötyjä oppimisen lähtökohdista. Kielentämisen hyötyjä vertaillaan kansainvälisesti tunnettuun matemaattisen ajattelun malliin ja sen näkökulmista pohditaan kielentämisen eri aspekteja. Oheismateriaalina tutkielmassa on käytetty luokkahuonekeskustelun käyttämiseen ja ylläpitämiseen ohjailevia tutkimuksia, joissa on esitelty pääpiirteittäin suullisen kielentämisen tapoja. Suullinen kielentäminen olisi hankalampaa kuvailla ilman konkreettisia esimerkkejä, joten on tutkielman etenemisen kannalta järkevää esitellä myös luokkahuonekeskustelun perspektiivi. Työssä läpikäytävät aiheet sopivat niin peruskouluun kuin lukioonkin, ja hieman muokattuna oikeastaan mille tahansa koulutustasolle. Alussa lähdetään liikkeelle matemaattisesta ajattelusta ja ymmärryksestä, jotta kielentämiselle saadaan muodostettua perustellut lähtökohdat. Sen jälkeen esitellään kielentämistä ja aletaan vertailemaan sen hyötyjä matemaattisen ajattelun kehittymiseen.

## 2 Matemaattinen ajattelu

Matemaattinen ajattelu on laaja käsite, joka on melko vaikea määritellä yksiselitteisesti. Matemaattiselle ajattelulle löytyykin useita erilaisia, toisistaan poikkeavia määritelmiä. Määritelmät koostuvat usein myös toisistaan eroavista käsitteistä. Sternberg [31] on todennut tutkimuksessaan, että matemaattisen ajattelun erilaiset määritelmät johtuvat tutkijoiden erilaisista tutkimuslähtökohdista. Tutkimuslähtökohtia voivat olla esimerkiksi: opiskelijan ympärillä vallitseva kulttuuri, taidot prosessoida informaatiota, ongelmanratkaisutaidot tai matemaattiset kyvyt ja uskomukset [11]. Vaikka matemaattiselle ajattelulle onkin löydettävissä monia erilaisia määritelmiä sekä tutkimuksia matemaattisen ymmärryksen lisäämisestä, on ymmärrystä lisääviä opetusmetodeja erittäin vaikea kehittää. Suurin osa opettajista luottaakin tutkimuksista saatuihin ”intuitioihin” opetuksessaan [30].

Burtonin [2] mukaan matemaattinen ajattelu on ajattelutyö, joka koostuu tarkoista operaatioista ja prosesseista sekä matemaattisesta dynamiikasta. Burton korostaa, että matemaattista ajattelua käytetään aina, kun kyse on matematiikkaan liittyvästä kontekstista. Jos ajattelun ajatellaan olevan tapa kehittää ymmärrystä ja laajentaa jo tiedossa olevien asioiden hallintaa, matemaattinen ajattelu hyödyntää tarkoituksia ja tapoja tähän matematiikan oppimisessa. Nämä tavat ovat matemaattisen ajattelun operaatiot, prosessit ja dynamiikat. [2]

Matemaattisen ajattelun operaatiot ovat mitä tahansa tapahtumia, jotka saavat ajattelemaan matemaattisesti. Yksinkertaisuudessaan lapsen näh-



dessä palikoita, hänelle voi herätä ajatus niiden lukumäärästä. Operaatioita ovat kaikki matematiikan relaatiot eli kaikki mitkä herättävät ajattemaan vastaavuuksia, yhtäläisyyksiä, lisäämistä tms. [2]

Matemaattisen ajattelun prosesseja Burton [2] ajattelee olevan neljä: täsmentäminen, otaksumien arvaileminen, yleistäminen ja vakuuttuminen. Täsmentämisellä tarkoitetaan kysymyksen tai ongelman kohdatessa tapahtuvaa tarkan merkityksen etsimistä. Tämän jälkeen tapahtuu otaksumien arvaileminen eli kun merkityksiä on tarpeeksi etsitty, arvaillaan asioiden välisiä yhteyksiä. Otaksumien arvaileminen on siis käytännössä hypoteesien, eli mitä voisi tapahtua ja miksi, tekemistä. Tämä arvaileminen tapahtuu lähes automaattisesti. Arvailujen myötä asia tulee etsittyä, esitettyä ja seuraavassa vaiheessa se tulisi osoittaa todeksi.

Yleistämisessä oppija kehittää järjestyksiä ja tarkoituksia suuremmasta tietomäärästä ja yleistää mistä tietyt asiat johtuvat. Yleistyksien jälkeen on vielä todistettava, että asia on vakuuttava. Ensin ajattelija vakuuttaa itsensä ja sen jälkeen muut. Tässä prosessissa omista yleistyksistä tulee siis julkisia. [2]

Matemaattisen ajattelun dynamiikalla tarkoitetaan liikkumista erilaisten yhteyksien ja vanhojen tietojen välillä useiden eri ajatuskierrosten avulla. Jokainen ajatuskierros rakentaa ymmärrystä ja tietoa edellisestä kierroksesta. Burtonin [2] prosessit liittyvät seuraavassa kappaleessa esitettävään konseptuaaliseen tietoon, niitä ei voi käyttää ulkoa opettelemalla, vaan asiasta muodostuu ymmärrys prosesseja käyttäessä.

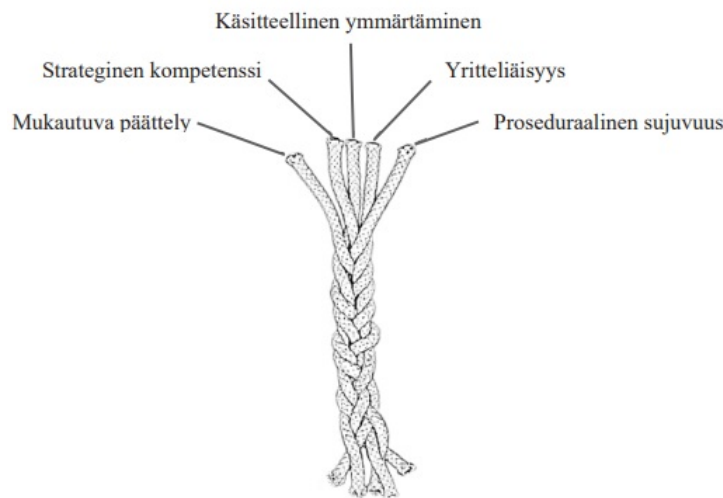
## 2.1 Matemaattinen ajattelu ja osaaminen

Matematiikan oppiminen on monien eri osa-alueiden yhdistelmä. Oppilaiden on opittava matemaattisen kielen avulla merkityksiä, yhteyksiä ja laskustrategioita, heidän on osattava lukea ja tulkita matemaattisia apukeinoja kuten diagrammeja, graafeja sekä osattava käyttää apuvälineitä, esimerkiksi laskimia tms. Oppimiseen vaikuttaa tietenkin myös metodit, joita opettajat käyttävät. Näitä osia yhdistelemällä oppilaat ajattelevat ja puhuvat matematiikasta. [19] On siis selvää, että oppiminen ylipäänsä sekä matemaattinen ajattelu eivät ole yksiselitteisiä asioita. Lermanin [19] mukaan matemaattinen ajattelu, kieli ja ymmärtäminen ovatkin kietoutuneet toisiinsa, ja ne vaikuttavat oppimiseen. Lermanin käsitys ymmärtämisestä on siis pääsääntöisesti samanlainen kuin Kilpatrickin ym. matemaattisen osaamisen määritelmä.

Kilpatrick, Swafford ja Findell ovat määrittäneet, mitä tarvitaan menestyksekkääseen matematiikan opiskeluun. Matemaattinen osaaminen koostuu viidestä toisistaan riippuvasta piirteestä:

1. **Käsitteellinen ymmärtäminen** (conceptual understanding), tarkoittaa matemaattisten käsitteiden, menetelmien ja näiden välisten suhteiden ymmärtämistä. Kun oppilas hallitsee käsitteellisen ymmärtämisen, hän tuntee matemaattisen idean ja osaa soveltaa sitä. Tällöin oppilas osaa myös jäsenellä oppimaansa, ja yhdistää uutta tietoa vanhojen opittujen asioiden kanssa.
2. **Proseduraalinen sujuvuus** (procedural fluency), tarkoittaa taitoja käyttää matemaattisia laskutoimituksia ja menetelmiä oikealla tavalla, joustavasti, täsmällisesti ja tehokkaasti. Proseduraalinen sujuvuus tukee käsitteellisen ymmärryksen muodostumista. Sujuvuuteen liittyy myös kyky arvioida saadun vastauksen oikeellisuutta, mikä on hyödyllinen ja tarvittava taito usein myös arkielämässä.
3. **Strateginen kompetenssi** (strategic competence) on kyky muodostaa, esittää ja ratkaista matemaattisia ongelmia. Strateginen kompetenssi onkin samankaltainen yleisemmin esiintyvän käsitteen ongelmanratkaisutaidon kanssa. Oppilailta usein onnistuu tietynlaisten ongelmien ratkaiseminen, mutta oppimansa soveltaminen ei enää onnistukaan. Oppilaat usein tarvitsevatkin harjoitusta juuri soveltaviin tilanteisiin. Jotta soveltaminen onnistuu, vaaditaan asioiden ymmärtämistä ja laskutoimituksien sujuvaa osaamista.
4. **Mukautuva päättely** (adaptive reasoning), tarkoittaa kyvykkyyttä loogiseen ajatteluun, reflektioon, perusteleamiseen ja omien päätelmiensä todistamiseen. Mukautuvaan päättelyyn kuuluu myös kyky yhdistää käsitteitä ja tilanteita. Jotta perusteleminen on oikeanlaista ja validia, tarvitaan tietoa vaihtoehtoista, jotta ne voidaan huomioida. Mukautuva päättely on matemaattisen ymmärtämisen yhdistävä tekijä, jonka avulla yhdistyy faktat, proseduurit, asiat ja ratkaisumetodit.
5. **Yritteliäisyys** (productive disposition), tarkoittaa oppijan ominaista taipumusta ajatella ja nähdä matematiikka hyödyllisenä ja kannattavana. Tähän liittyy myös usko omaan kehitykseen ja omiin kykyihin. Jotta mikä tahansa neljästä edellä mainitusta osaamisen piirteestä kehittyisi, on oppijan uskottava, että matematiikka on ymmärrettävää, eikä umpimähkäistä, ja että he voivat oppia sitä. Yritteliäisyys kehittyy, kun huomaa taitojensa kehittyvän ja näin se auttaa myös muita piirteitä kehittämään.

Yllä esitellyt piirteet ovat kietoutuneet toisiinsa ja yksittäin ne eivät takaa matematiikan oppimista. Kuvassa 1 on havainnollistettu piirteiden kietoutumista toisiinsa. Matemaattinen osaaminen ei myöskään kehity keskittymällä



Kuva 1: Kuvassa havainnollistettu matemaattisen osaamisen piirteiden riippuvaisuutta toisistaan (suom. Joutsenlahti 2005). [16]

yhteen tai kahteen piirteistä. Ne myös tukevat toisiaan, eli yhden piirteen kehittyessä, myös muut kehittyvät. Piirteiden esittämien osaamisalueiden hallitseminen antaa pohjan matemaattiselle osaamiselle. [16]

Tässä tutkielmassa keskitytään kielentämisen näkökulmasta kahteen ensimmäiseen Kilpatrickin ym. määrittämiin piirteisiin. Miten ne kehittyvät ja mitä tarvitaan mihinkin kielentämisen osa-alueeseen.

## 2.2 Konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto ja representaatiot

Matemaattinen tieto voidaan jakaa kahteen eri tyyppiin: proseduraaliseen tietoon ja konseptuaaliseen tietoon. Eri tutkijoiden määritelmät näistä tiedoista eroavat toisistaan hieman, koska niiden eroavaisuudet voi olla helppoja määritellä periaatetasolla, mutta käytännössä niiden erot eivät olekaan selkeitä ja yksikäsitteisiä [8]. Jos tietoa ei pysty jakamaan konseptuaaliseen tai proseduraaliseen tietoon, niin kyseessä on strategiatieto. Tässä tutkielmassa tiedoille käytetään seuraavaksi esiteltäviä määritelmiä.

### 2.2.1 Konseptuaalinen tieto

Haapasalo ja Kadujevich [8] ovat määritelleet konseptuaalisen tiedon seuraavasti:

”Konseptuaalinen tieto on taitavaa liikkumista eri käsitteiden,

määritelmien, algoritmien, proseduurien ja ongelmien välillä käyttäen erilaisia representatioita.” [8]

Haapasalo [7] on täsmentänyt, että konseptuaalinen tieto rakentuu periaatteiden ja käsitteiden ymmärtämisestä. Siihen sisältyy myös kyky ymmärtää periaatteiden ja käsitteiden välisiä suhteita sekä taito soveltaa niitä erilaisissa konteksteissa. Konseptuaalista tietoa ei voi saavuttaa ulkoa opettelemalla, vaan uutta tietoa kehittyy jäsentelemällä tiedon eri sisältöjä ja riippuvuuksia. Konsepti voidaan nähdä myös matemaattisena tietona, joka on esitetty formaalina ja eksaktina käsitteenä [29].

### 2.2.2 Proseduraalinen tieto

Proseduraalinen tieto on määritelty seuraavalla tavalla [8]:

”Proseduraalinen tieto määritellään dynaamisena ja onnistuneena sääntöjen, algoritmien, proseduurien käytöllä oikeanlaisten representaatioiden avulla. Tämä edellyttää usein näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, varsinkaan suorituksen ollessa automatisoitunut.”

Proseduraalinen tieto vastaa kysymykseen ”miten” ja etenee sen jälkeen vaihe vaiheelta tehtynä matemaattisena algoritmina, jossa jokainen on tehtävä ennen seuraavaan vaiheeseen etenemistä. Toisaalta proseduraalinen tieto voidaan kuvata prosessina, joka etenee vaihe vaiheelta käyttäen seuraavassa vaiheessa edellistä [11]. Tämän määritelmän perusteella proseduraalinen tieto koostuu tiedoista ja taidoista käyttäen matemaattisia operaatioita sekä algoritmeja. Toisin sanoen se sisältää matemaattiset keinot, joilla ratkaistaan matemaattisia ongelmia sekä suoritetaan laskutoimituksia. Haapasalo ja Kadijevich [7] ovat tutkineet, että proseduraalista tietoa on mahdollista kerryttää ja ylläpitää laskurutiineilla, jolloin tieto on helposti palautettavissa mieleen ja soveltaminen onnistuu. Proseduraalista tietoa mitataan pääasiassa tavallisilla kokeilla, jotka sisältävät hyvin määriteltyjä tehtäviä. Näillä pysytään mittaamaan oppilaan taitoja hallita erilaisia operaatioita symboleita käyttämällä sekä ongelmanratkaisutaitoja jollakin proseduurijonolla. [8]

### 2.2.3 Representaatiot

Representaatiot, joita sekä proseduraalisen että konseptuaalisen tiedon määritelmässä käytetään, määritellään usein ajattelun apuvälineiksi. Ne muodostuvat ja rakentuvat niiden käyttämisen myötä. Representaatioita syntyy, kun

jokin matemaattinen rakenne esitellään eri esitysmuodossa kuin tavallisesti [20]. Representaatiot voidaan jakaa ulkoisiin ja sisäisiin representaatioihin. Sisäinen representaatio koostuu mentaalisesta kuvasta ja ulkoinen konkreettisesta rakenteesta. Esimerkiksi jonkin ongelman ratkaisu yksilön mielessä on sisäinen ja paperille kirjoitettuna/piirrettynä se on ulkoinen representaatio. Aina ei kuitenkaan ole niin, että ulkoinen puoli on vain sisäisen heijastus, mutta näiden yhteys on edellytys sille, että representaatiota voidaan käyttää tehokkaasti. [8]

#### 2.2.4 Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon yhteys

Proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto ovat kaksi tiedon lajia, jotka eivät automaattisesti tuo mukanaan toista [8, 16]. On myös olemassa tilanteita, jolloin kumpikaan vaihtoehto ei auta ratkaisuun pääsemiseen. Esimerkiksi tilanteessa, jossa oppilas osaa mekaanisesti laskea laskutehtävän oikein, mutta ei ymmärrä toimintansa perusteita. Hän saattaa ymmärtää tehtävän ja sen ratkaisuperiaatteen, mutta taitojen puute estää tehtävän ratkaisemisen. Tarjolla ei ole yleistä ohjetta näiden kahden tiedon yhdistämiseen, koska lähestymistavan määrää muun muassa aihepiiri, konteksti ja oppijan taustatiedot [8]. Koska eroa näiden välille on vaikea tehdä, onkin linkittymistä kuvailtu seuraavasti

”Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon eroa on käytännössä usein vaikeaa jopa epätarkoituksenmukaista tehdä juuri muulla perusteella kuin luonnehtimalla suorituksen automatisoitumista ja sitä kuinka tietoisesti yksilö perustelee tai joutuu perustelemaan toimintansa vaiheet.” [8]

Konseptuaalisessa tiedossa ja sen rakentumisessa muodostetaan yhteyksiä eri representaatioiden välille. Proseduraalisessa tiedossa yleensä käytetään jotakin yhtä representaatiota. Representaatioita voidaan muuttaa toisiksi ja vaihdella eri operaatioiden avulla [20]. Hyvä representaatio ilmaisee vain ongelman tärkeät piirteet ja useiden representaatioiden käyttäminen auttaa konseptuaalisen tiedon kehittämisessä [8, 26]. Tässä työssä representaatioita tarkastellaan matematiikan näkökulmasta. Matematiikassa opetetaan taitoja, joiden avulla voidaan muotoilla sekä tulkita taulukoita, kuvaajia ja kaavoja. Nämä taidot ovat oppilaalla ikään kuin työkaluina, joita tarpeen vaatiessa voi käyttää. Juuri näitä työkaluja kutsutaan representaatioiksi, joita oppilas käyttää konseptuaalisen tiedon rakentamiseksi. Kielentämisellä voidaan muodostaa erilaisia representaatioita samoille asioille ja näin saada erilaisia näkökulmia konseptuaalisen tiedon puolelle. Työssä tutkitaan liikkumista erilaisten representaatioiden välillä käyttäen apuna luonnollista kieltä.

Strategiatieto on kognitiivista, ohjailevaa ja kontrolloivaa prosessointia. Strategioissa on kyse menetelmistä, joissa tarvitaan matemaattisia käsitteitä, algoritmeja ja lauseita. Strategiatieto myös ohjailee oppilasta esittämään, muotoilemaan ja ratkaisemaan matemaattisia ongelmia. Oppilailta usein onnistuu tietynlaisten ongelmien ratkaiseminen, mutta oppimansa soveltaminen ei enää onnistukaan. Oppilaat usein tarvitsevatkin harjoitusta juuri sovelta-  
viin tilanteisiin. Jotta soveltaminen onnistuu, vaaditaan asioiden ymmärtä-  
mistä ja laskutoimituksien sujuvaa osaamista. [11, 16]

### 3 Matemaattisesta kielestä

”Matematiikka on tiede, joka käsittelee rakenteiden mallintamis-  
ta, muutosta ja avaruuksia. Matemaattisen formalismin mukaan  
matematiikka on aksiomaattisesti määriteltujen abstraktien ra-  
kenteiden tutkimista symbolisen logiikan ja matemaattisen mer-  
kintäjärjestelmän keinoin. Muitakin näkemyksiä on. Matematiik-  
kaa voi ajatella fysikaalisten ja käsitteellisten suhteiden ilmaise-  
misen kielenä, jonka kielioppi ja käsitteistö on määriteltä äärim-  
mäisen tarkkaan. Tämä mahdollistaa asioiden ilmaisemisen tar-  
kasti.” [34]

Kieli on symbolinen järjestelmä, joka koostuu symboleista eli merkeis-  
tä. Jokaisella symbolilla on sekä sisältö että muoto. Kieli toimii apuvälinee-  
nä ajattelussa, tiedonhankinnassa, välittämässä, vaikuttamisessa, sosiaalis-  
ten suhteiden luomisessa sekä ylläpitämisessä [10]. Matematiikan näkeminen  
kielenä on sopivaa ja perusteltua, sillä matemaattisia ideoita on pystyttävä  
esittämään ja niistä on pystyttävä keskustelemaan luonnollisen kielen avul-  
la [27]. Matematiikan kieltä ei kuitenkaan enää pidetä niin yksinkertaises-  
ti identifioituna formaaliksi symbolikieleksi kuin ennen [22]. Matematiikan  
kieleen kuuluvatkin luonnollisen kielen ilmaukset, joilla on oma erityismer-  
kityksensä matematiikassa, matemaattiset symbolit, lausekkeet ja kuviokieli  
[21, 14]. Toisistaan eroteltuna matematiikan kielet ovat: symbolikieli, luon-  
nollinen kieli, kuviokieli ja taktillinen toiminnan kieli [14].

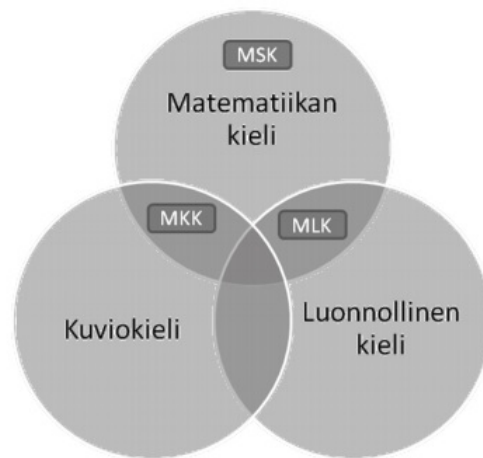
Edes matemaatikoilla ei kuitenkaan ole täysin yhtenäistä tapaa käyttää  
matematiikan kieltä, vaan siinä on sekä yksilöllisiä että kulttuurellisia ero-  
ja [4]. Myös koulumatematiikan kieli eroaa siis matemaatikoiden käyttä-  
mästä kielestä. Koulumatematiikan kieli koostuu yleisesti matematiikan sym-  
bolikielestä, matematiikkaan liittyvästä luonnollisesta kielestä, mahdollisesti  
muusta luonnollisesta kielestä sekä matemaattisista kuvioista. Aihepiiristä  
riippuen esimerkiksi geometriassa, kuviokieli voi olla keskeisemmässä osas-  
sa kuin muut kielet [13]. Jotta kielen avulla kommunikointi onnistuisi

myös matematiikan tunneilla, pitää symboleja, kieltä ja koulumatematiikassa käytettyjä tapoja osata hyödyntää. Yhtä tärkeää on niiden merkityksien ymmärtäminen [4]. Tavallisilla luonnollisen kielen sanoilla, kuten "puoli" tai "piiri", ja ilmaisuilla, kuten "jos ja vain jos", saattaa olla erilaisia merkityksiä ja käyttötapoja riippuen, onko kyse matematiikasta vai arkielämän keskustelusta. Tämän takia koulumatematiikan kieltä on osattava käyttää oikealla tavalla. Oppilaille voi usein olla hyödyllistä selittää matemaattisia tehtäviä luonnollisen kielen avulla omin sanoin, sillä luonnollisen kielen ja matemaattisten ajatusten onkin havaittu olevan enemmän yhteydessä toisiinsa kuin on uskottu [22].

Peruskoulun oppimateriaaleissa oppilaille opetetaan ainoastaan matemaattisen symbolikielen (Kuva 2 MSK) käyttöä. Monille oppilaille kuitenkin olisi hyödyllisempää käyttää matemaattisen symbolikielen lisäksi luonnollista sekä kuviokieltä. Kuvassa 2 on havainnollistettu kielten yhteyttä toisiinsa matemaattista tehtävää ratkaistaessa. Kuvassa 2 matematiikan luonnollisella kielellä (MLK) tarkoitetaan matematiikan kielen ja luonnollisen kielen yhteistä aluetta, joka sisältää siis luonnollisen kielen sanoja, joilla on matematiikassa täsmällinen erityismerkitys. Myös käsitteiden nimet kuuluvat tälle alueelle, esimerkiksi edellä mainittu "piiri" tai "lieriö". Matematiikan kuviokieleen (MKK) kuuluvat matematiikan tehtävän ratkaisun kannalta tärkeät kuviot, esimerkiksi geometriset kuviot tai tilastolliset kuvaajat. Opettaessa tulisi kannustaa oppilaita käyttämään tehtävän ratkaisussa omaa luonnollista kieltään, ja vasta sen jälkeen vähitellen siirtymään matemaattisempaan muotoiluun. Tällä tavoin oppilaat ymmärtävät asian paremmin ja jotta heidän käyttämänsä matematiikan kieli kehittyisi ja muuttuisi sujuvammaksi. [21, 13]

Oppilaiden liiallinen keskittyminen oikeanlaiseen matemaattiseen muotoiluun, saattaa rajoittaa itse matemaattisen aiheen ymmärrystä. Muotoilu on kuitenkin vain sivuseikka aiheen ymmärtämisessä ja oppimisessa. Paul Cobb (1988 kts. [21]) on havainnut tutkimuksessaan oppilaiden luottavan enemmän matemaattisesti saatuun ratkaisuun, kuin muulla tavalla saatuun ratkaisuun. Havainnot liittyvät juuri matemaattiseen muotoiluun keskittymiseen. Esimerkkinä eräs alakoulun oppilas, joka oli saanut yhteenlaskusta  $16+9$  oikean vastauksen laskemalla laskun päässälaskuna sormia apuna käyttäen. Tämän jälkeen oppilas laski laskun allekkain paperilla ja sai vastaukseksi 15. Kun oppilaalla oli kaksi eri vastausta, luotti hän allekkainlaskuun, eikä omaan päättelyynsä. [21]

Jamisonin [9] määritelmän mukaan kieli, jota matematiikassa käytetään, eroaa normaalista arkipäiväisestä kielestä kolmella tavalla. Ensimmäiseksi matemaattinen kieli on ajatonta, siitä ei pysty havaitsemaan menneitä, nykyhetkeä tai tulevaa, asiat vain tapahtuvat. Tästä syystä oppilaille voi aiheuttaa



Kuva 2: Matematiikan sanallisen tehtävän ratkaisuisa matematiikan kieli, kuviokieli ja luonnollinen kieli yhdistyvät. Lyhenteillä merkityt alueet kuvaavat matematiikan symbolikieltä (MSK), matematiikan luonnollista kieltä (MLK) ja matematiikan kuviokieltä (MKK). [13]

hankaluuksia muotoilla matematiikan kielellä tavallisiin asioihin liittyviä esimerkkejä. Jamisonin mukaan tämä ei kuitenkaan ole merkittävä ongelma oppilaiden matematiikan kielen käytössä ja ymmärryksessä. Toinen eroavaisuus on, että matemaattinen kieli ei sisällä tunnesanoja. Matemaatikot saattavat joissain tilanteissa elävöittää puhettaan, mutta pääasiassa matemaattisessa kielessä ei ole tunnetta. Tämäkään ei tuota oppilaille ongelmia, koska tunnesanat eivät luontaisesti kuulu matemaattiseen kirjoittamiseen. Kolmas ja tutkitusti eniten oppilaille vaikeuksia tuottava eroavaisuus on matemaattisen kielen tarkkuus. Kielen selkeys ja monitulkinnallisuuden puuttuminen ovat kaikkein hankalin asia oppilaille. Normaalissa kielessä on tulkinnan varaa ja piilotettuja merkityksiä, jolloin oppilaat etsivät niitä myös matematiikassa. Monitulkinnallisuutta etsiessään oppilaat saattavat huomaamattaan vaihtaa tekstin tarkoitusta, jolloin he ymmärtävät asian väärin. Matemaattisen kielen selkeyttä pitäisi korostaa ja harjoitella. Monitulkinnallisuuden puuttumista on korostettava esimerkkien ja oletuksien avulla. Matemaattisen kielen oppimiseen tarvitaan samoja työkaluja kuin kielten tunneilla: kirjoittamista, puhumista, kuuntelua, muistisääntöjä yms. [9]

On olemassa lähes kaikkialla hyväksytty looginen ja retorinen rakenne matemaattiselle esitykselle, joka koostuu määrittelystä, teoriasta ja todistuksesta. Rakenne on keksitty jo kauan ennen ajanlaskun alkua, ja jo muinaiset kreikkalaiset käyttivät tätä samaa rakennetta. Rakenne on kuitenkin esitetty usein sirpaleisesti oppikirjoissa, jolloin oppilaille ei muodostu tarkkaa koko-



naiskuvaa siitä. Lahjakkaimmat oppilaat saattavat sisäistää sen epäselvästä esitystavasta huolimatta, jolloin he ymmärtävät rakenteen ja osaavat käyttää sitä jatkossa. Suurimmalle osalle oppilaista rakenne jää kuitenkin irralliseksi, ja selkeä matemaattinen rakenne tuntuukin vain sekavalta. [9]

## 4 Matematiikan kielentäminen

### 4.1 Mitä matematiikan kielentäminen on?

Matematiikan kielentämisellä tarkoitetaan matemaattisen ajattelun monipuolista ilmaisemista kielen avulla, joka tapahtuu pääsääntöisesti joko suullisesti tai kirjallisesti [12, 19]. Esimerkiksi Sfard [30] on tutkimuksessaan todennut, että kommunikaatio ihmisten välillä ja yksilöllinen ajattelu ovat kaksi eri puolta samasta ilmiöstä eli kommunikaatiosta. Kielentämisen voidaan siis ajatella tapahtuvan myös yksilöllisesti itselleen. Kaikkiin kielentämisen ja kommunikoinnin puoliin tarvitaan matematiikan kielen sujuvaa osaamista, jolloin on myös ymmärrettävä, että luonnollisen kielen lauseet eivät välttämättä käänny helposti matematiikan kielelle. [28]

Tällä hetkellä on vallallaan ajatus, että kielellä on suuri rooli opetuksessa ja oppimisessa ja varsinkin ajatus siitä, että keskustelu on hyödyllinen keino oppimisen syventämisessä [22]. Lerman (2001) toteaa tutkimuksessaan matematiikan oppimisen tai matemaattisesti ajattelevan oppimisen olevan oppimista puhua matemaattisesti.

”Saat opiskelijan puhumaan matematiikasta – saat opiskelijan ajattelemaan matematiikkaa [15].”

Samaa ajatusmallia on nähtävissä opetussuunnitelmistakin, sillä kommunikoinnin ja matemaattisen kielen osaamisen merkitystä korostetaan [25].

”Matematiikan opetuksen tehtävänä on tutustuttaa opiskelija matemaattisen ajattelun malleihin sekä matematiikan perusideoihin ja rakenteisiin, opettaa käyttämään puhuttua ja kirjoitettua matematiikan kieltä.” [25]

Lukion opetussuunnitelmassa korostetaan myös matemaattisen ajattelun selkeää ilmaisua.

Matematiikan ainedidaktiikan tutkimuksissa matemaattisen kielentämisen on havaittu tukevan oppimista ainakin kolmen näkökulman puitteissa [10, 23]:

1. Matematiikan kielentäminen yhdistää oppilaan matemaattisen ajattelun ja kielen. Oppilas jäsentee ja selkeyttää omaa ajatteluaan sekä monipuolistaa matemaattista ilmaisuaan kirjoitetun tai puhutun kielen avulla. Oppilas perustelee ja reflektoi omia uskomuksiaan. [10] Jos oppilaalla on konseptuaalista tietoa aiheesta, hän pystyy tietoisesti erilaisiin representaatioihin, joita kielentämisen avulla voidaan jäsentellä ja harjoittaa. Hän pystyy kielen avulla selittämään, löytämään todistuksia, yleistämään yms. Konseptuaalisen tiedon avulla hän myös pystyy vastaamaan esimerkiksi kysymykseen miksi. Kielentämisen ensimmäinen hyöty perustuu tiedon konseptualisoimiseen ja erilaisten representaatioiden käyttöön oppilaan jäsennessä omia ajatuksiaan kirjallisesti tai suullisesti. Jos oppilaalla ei kuitenkaan ole aiheesta konseptuaalista tietoa, ei kielentämisellä välttämättä saada konseptuaalista tietoa myöskään rakentumaan, koska oppilaalla ei välttämättä ole minäkäänlaista etukäteistietoa aiheesta eikä näin ollen representaatioitakaan käytettävissä. Silloin kielentämisen toisen hyödyn avulla oppilas voisi rakennella konseptuaalista tietoa.
2. Samanaikaisesti oppilaan oma ajattelu näkyy myös muille oppilaille ja opettajalle. Kielentämisen avulla tehtävien ratkaisuun saadaan uusia näkökulmia, mikä tukee matematiikan oppimista sekä oman osaamisen arviointia. Samanaikaisesti kun yksi oppilas ilmaisee oppimaansa kielellisesti, muut oppilaat voivat verrata omia tietojaan ja käsityksiään toisen oppilaan ilmaisuun, ja voivat keskustelun avulla muovata sekä omaansa että toisen oppilaan tietämystä.[10, 23] Representaatiot rakentuvat vanhojen representaatioiden päälle, jolloin niitä muokataan tai vanhat vääränlaiset representaatiot hylätään. Oppilaiden ajattelun tullessa esiin muille kielentämisen seurauksena, he voivat vertailla omia representaatioitaan ja muokata tai rakentaa omiaan uudelleen. Voi myös olla, että vertaisryhmästä esille tulevat erilaiset representaatiot ovat vuorovaikutuksessa siten, että toinen esitystapa selittää toista, jolloin kysymyksessä on representaatioiden välinen vahva yhteys[8]. Yksinkertaisesti ilmaistuna suullinen kielentäminen/keskustelu nähdään prosessina, jossa omaa tietoaan on mahdollista kerryttää tai muokata vastaamaan tilannetta muiden tietojen perusteella.
3. Opettajan arviointi- ja suunnittelutyöhön saadaan tärkeää tietoa, kun oppijoiden ajattelu ja osaaminen on selkeämmin nähtävissä.

Nämä kolme näkökulmaa kielentämisestä pätevät kaikille ikäluokille alakoulusta korkeakouluun. Kielentämisen hyötyjen yhteydessä on syytä pohtia

myös niiden toimivuutta esimerkiksi oppimisvaikeuksista kärsivien oppilaiden tilanteessa. Puutteet matematiikan osaamisessa voivat johtua monista eri syistä, ja ennen kuin mitään apukeinoa yritetään käyttää opetuksessa, tulee ensimmäisenä määrittää, mistä oppimisen haasteet kunkin oppilaan tilanteessa johtuvat [30].

Kielentämisen tutkimus on Suomessa vasta alkuvaiheessa [10]. Kielentämistä on kuitenkin tutkittu lähes kaikilla koulutustasoilla opetuskokeilujen merkeissä. Kirjallista kielentämistä on kokeiltu peruskoulu-, lukio- ja yliopistotasolla, suullista kielentämistä on harjoitettu jo esiopetuksessakin [14]. Tässä tutkimuksessa esiteltävät tiedot ja kielentämisen käyttötavat soveltuvat niin peruskoulutasolle kuin lukioonkin.

Matemaattinen kommunikoiminen eli kielentäminen voi tapahtua niin sanallisesti, kuvallisesti kuin myös toiminnan kautta, joista kaikissa käytetään erilaisia representaatioita. Kielentäminen voi tapahtua yhdessä muiden kanssa, mutta myös täysin yksinään [19, 30]. Oppilas jäsentelee matemaattista ajatteluaan kielentäessään, jolloin opittu tieto saattaa muuttua konseptuaaliseksi, sillä se verkostoituu kielen avulla muihin tietoihin [10, 18].

Monipuolisella kirjoittamisella matematiikan tehtävää ratkaistaessa on monia hyötyjä: sen on tutkittu edistävän matematiikan oppimista ja syventävän tietoa, kehittävän ymmärtämistä, parantavan asenteita ja helpottavan huomattavasti opettajan arviointityötä [14]. Kirjoittaminen ja lukeminen matematiikassa ei kuitenkaan ole tavanomainen prosessi, kuten esimerkiksi vieraan kielen tilanteessa. Matematiikan lukeminen yhdistää tekstin lukemisen, kuvaajien tulkitsemisen, symbolien tunnistamisen ja tulkitsemisen sekä sujuvan liikkumisen näiden kaikkien välillä. Jotta kirjoittaminen ja lukeminen matemaattisesti onnistuu, pitää kielellinen syntaksi ymmärtää ja sen käyttö hallita. [17]

Verbaaliset sanonnat matematiikkaan liittyvissä keskusteluissa taas takaavat näkemyksen yksilölliseen matemaattiseen ajatteluun, ja ilmentävät malleja, joita oppilaat havaitsevat matemaattisissa ongelmissa [23]. Matemaattisen ajattelun ilmeneminen ei kuitenkaan ole yksinkertainen tai helposi esille tuleva aspekti. Matemaattiseen ajatteluun liittyvissä tutkimuksissa kaikki eivät kuitenkaan esitä asiaa samalla tavalla kuin Meaney, sillä kielen avulla esitetyt näkemykset eivät lähes koskaan vastaa täysin alkuperäisiä ajatuksia. Tällöin kommunikoinnin voidaan ajatella olevan myös esitystapa jo valmiille ajatuksille [30]. Lerman [19] on kuvaillut tutkimuksessaan, että matematiikan luokassa tapahtuva kommunikaatio ja vuorovaikutus ei ole ”ikkuna” oppilaan mieleen ja ajatuksiin, koska mieli ja ymmärrys eivät ole staattisia tai muutettavissa tekstuaaliseen muotoon, mutta kielenneyt ajatukset kuitenkin vastaavat kontekstissaan tietoutta ja aktiivisuutta asiasta. Sen avulla tietojen jakaminen eli kommunikointi tapahtuu [19]. Matemaatti-

sen idean esittämistapa vaikuttaa myös oppilaan ymmärrykseen, jonka vuoksi olisi tärkeää, että oppilas saisi ja pystyisi ilmaisemaan asian omin sanoin haluamallaan tavalla [10, 18]. Sekä suulliseen että kirjalliseen kielentämiseen ja niistä esitettyihin hyötyihin keskitytään tarkemmin seuraavissa kappaleissa.

Jos kielentämisen lähtökohdat tiivistettäisiin yhteen lauseeseen:

”Kun oppilas ymmärtää MITEN asiat on kerrottu, he voivat paremmin ymmärtää MITÄ on kerrottu ja vasta silloin heillä on mahdollisuus ymmärtää MIKSI tapahtuu niin kuin on kerrottu.”  
[9]

## 4.2 Kielentäminen opetuksen apuna

Matemaattisten koulutusohjelmien yhtenäinen tavoite on kehittää oppijan kykyä kommunikoida koulumatematiikan kielellä ja käyttää matemaattisia symboleita oikealla tavalla [4]. Pimmin [27] mukaan ilman harjoittelua ja ohjaamista matematiikan kielen käyttöön, matemaattinen sanasto voi johtaa oppilaita harhaan, jolloin he voivat muodostaa vääränlaisia tarkoituksia esimerkiksi matemaattisille merkeille. Oppilaat saattavat myös kehittää muistisääntöjä tai lainalaisuuksia, jotka ovatkin vaillinaisia, jollaisista esimerkkinä ”kaikki luvut ovat parillisia tai parittomia” ja ”kertominen suurentaa” [27].

On havaittavissa oppilaiden ajattelevan usein, että arkipäiväinen logiikka ei enää päde matematiikan tunnilla. Esimerkiksi he voivat ratkaista ihmisen iäksi 180 vuotta, ja sen enempiä ajattelematta luulevat vastauksen olevan oikein. Oppilas siis luottaa muistamaansa laskusääntöön, joka ohjaa hänen päättelyään representaatioiden välillä. Oppilaille on siis syntynyt ajatusmalli, jonka mukaan omaa tietämystä luokkahuoneen ulkopuolella ei kuulu huomioida matematiikassa. Ongelma saattaa johtua siitä, että oppilaat luulevat olevansa ”pakotettuja” käyttämään matemaattisia termejä ja malleja. Jos oppilaita rohkaistaisiin käyttämään enemmän arkielämän luonnollista kieltä tehtävien ratkaisussa, voisivat ratkaisut olla realistisempia. Vasta epämuodollisen vastauksen jälkeen, tehtävänratkaisu voitaisiin muotoilla matematiikan symbolikielellä algebrallisesti. Ajatellessaan arkipäiväisen kielen olevan kiellettyä, oppilaat menettävät vaihtoehtoisia tapoja kuvailla oppimisaan asioita. [21]

Usein oppikirjat vahvistavat oppilaiden käsitystä siitä, että vain matemaattinen esitysmuoto on sopiva ratkaisemaan matematiikkaa. Oppilaiden ymmärrys jää tällöin puutteelliseksi, koska he eivät osaa liittää asioita arkipäiväisiin tilanteisiin. Oppilaat eivät myöskään osaa selittää miksi saatu ratkaisu johonkin tehtävään on oikea. Oppilaat siis oppivat kyllä ratkaisemaan tehtäviä, mutta eivät kuvailemaan tulokseen johtanutta ajatusprosessia tai

perustelemaan, miksi vastaus on oikein. Toisin sanoen oppilaat osaavat matemaattiset proseduurit, mutta konseptuaalinen tieto aiheesta puuttuu. Oppilaiden tulisi siis ymmärtää, että kirjoitetut selitykset ovat osa matematiikkaa ja tärkeä osa matemaattisen tehtävän ratkaisua ja näin ollen konseptuaalista tietoa tulisi rakentaa. [21, 8]

### 4.3 Suullinen kielentäminen

Suullinen kielentäminen perustuu matematiikan luokassa tapahtuvaan kommunikaatioon ja vuorovaikutukseen muiden oppilaiden ja opettajan kesken. Kommunikaatiolla tarkoitetaan tietojen jakamista ihmisten kesken yhteisen symbolisysteemin eli kielen kautta. Merkitysten rakentaminen luokassa ei ole jokaisen oppilaan yksityinen prosessi, vaan merkityksiä voidaan muodostaa yhdessä kommunikoiden. Oppilaat esittävät siis erilaisia representaatioita toisilleen. Sen myötä tietoa ei siirretä opettajalta oppilaille vaan rakennetaan yhdessä [2, 30]. Ideaalisessa tilanteessa oppilaat uskaltavat ilmaista omia ideoitaan ja näkemyksiään omin sanoin pelkäämättä virheitä [10]. Jotta luokassa olisi vapaa ja myönteinen ilmapiiri keskustella, on jokaisen oppilaan kunnioitettava toisiaan. Jokaisen oppilaan tulee kuunnella mitä muilla on sanottavana, jokaisen oppilaan on kuultava, mitä muut puhuvat ja jokaisen oppilaan on osallistuttava keskusteluun jossain vaiheessa. Kenenkään ei kuitenkaan ole pakko osallistua tiettyyn keskusteluun, jos se tuntuu epämiellyttävältä [3]. Avoimessa keskustelussa oppilas havaitsee mitä itse tietää verrattuna muihin. Jos keskustelu perustuu pääasiassa tietämykseen, voi aiheuttua epävarmuutta ja paniikkia, mutta jos keskustelu pidetään olettamuksien ja perustelujen testaamisen tasolla, voi se olla hyödyllistä ajatuksien syventämisessä ja konseptuaalisen tiedon rakentumisessa [2]. Sfard [30] on todennut tutkimuksessaan, että kysymyksen ”ymmärsivätkö oppilaat asian” sijaan olisi hyödyllisempää kysyä ”miten oppilaat ymmärsivät asian”. Tällöin ilmenisi myös mahdolliset väärinymmärrykset.

Suullisen kielentämisen voi lisätä osaksi opetusta kolmella helposti toteutettavissa olevalla tavalla: koko luokan keskustelulla, pienryhmä-keskustelulla tai parikeskustelulla [3]. Koko luokan keskustelussa opettaja johtaa keskustelua, mutta hän ei ole ensisijaisesti äänessä kysymyksiä esittäen. Ennen opettajan rooli on kannustaa oppilaita esittämään ajatteluaan ja perustelujaan. Tietenkin opettajan on oltava keskustelun johtaja, jotta tiedetään keskustelun tarkoitus ja pysytään asiassa. Perusteluiden ei myöskään tarvitse olla täysin oikein, vaan pääpointtina on saada oppilaat kertomaan ajatuksiaan. Opettajan keskustellessa yhden oppilaan kanssa, hän voi oikeanlaisilla kysymyksillä ohjata keskustelua niin, että oppilas itse ymmärtää asian oikein. Opettaja siis aiheuttaa oppilaalle kognitiivisen ristiriidan, jonka kautta

oppiminen tapahtuu [29]. Sfard [30] pohtii kuitenkin tutkimuksessaan, onko edellä kuvaillussa tilanteessa aina kyse oppimisesta ja ymmärtämisestä. Oppilaalla kuitenkin on tarve vastata opettajalle oikein ja ohjaileviin kysymyksiin saattaa pystyä vastaamaan oikein ilman sen suurempaa ymmärtämistä asiasta. Oikea vastaus voi jäädä mieleen, mutta ei välttämättä pystytä varmistumaan, syntyykö syvempää ymmärrystä siihen johtaneista syistä.

Pienemmässä ryhmässä keskustellessa oppilaat saavat helpommin kerrotua oman mielipiteensä, kun kuulijoina ei olekaan koko luokka. Periaate on muuten lähes sama kuin koko luokan keskustelussakin. Opettaja ei kuitenkaan voi kontrolloida kaikkien ryhmien keskustelua samanaikaisesti, joten keskustelu ei välttämättä ole tuottoisaa koko ajan [3]. Pienemmässä ryhmässä keskustellessa herää muutama kysymys, esimerkiksi jos matemaattinen asia ei tuota vaikeuksia kenellekään ryhmän jäsenistä, ei keskustelun hyödyllisyyttä ole mahdollista määrittää [30]. Sama epäkohta pätee myös seuraavaksi esitettävässä parikeskustelussa.

Parikeskustelun pääpointtina on nopea ajatustenvaihto lähimmän viereisen ihmisen kanssa, ennen vastaamista koko luokan kuullen. Suurin hyöty tässä tavassa on se, että oppilaiden seurattessa opetusta, on heillä tarve saada oma äänensä kuuluviin. Myös oppilaat, jotka eivät välttämättä ole ymmärtäneet kaikkea, voivat saada pariltaan nopean vastauksen kysymyksiinsä. Parikeskustelu toimii siis myös hyvin osana koko luokan keskustelua [3]. Parikeskustelussa ei kuitenkaan ole opettajaa eikä muutenkaan asiantuntijaa kuulemassa keskustelua, joten keskustelun tuloksena ei välttämättä synny minkään näköistä näkyvää ymmärryksen syventymistä [30]. Anna Sfard [30] on analysoinut kahden oppilaan keskustelua ja havainnut, että tässäkin tapauksessa toisen oppilaista yrittäessä selvittää ymmärtämäänsä asiaa toiselle, ja selityksen ollessa täysin tyydyttävää, ei huomattavaa ymmärryksen kasvamista välttämättä tapahdu siitäkään huolimatta toisen oppilaan kohdalla.

Suullinen keskustelu matematiikan luokahuoneessa auttaa oppilaiden oppimista suorasti ja epäsuorasti. Keskustelun avulla voi oppia tai saada tietoa toisten oppilaiden ideoista, ideoiden välisistä suhteista, strategioista, prosesseista, faktoista, matematiikan historiasta yms. Kaikista näistä asioista voidaan keskustella, jolloin ne myös tulevat ymmärretyksi, jolloin tieto voi jopa muuttua konseptuaaliseksi. Epäsuorasti keskustelu vaikuttaa oppimiseen sosiaalisen yhteisöllisyyden kautta. Oppilaat saavat toisiltaan kannustusta, uusia ideoita ja tukea. [3]

On kuitenkin muistettava, että vaikka suullisen kielentämisen kautta saatu informaatio on epäilyksettä tärkeää, se ei aina ole riittävästi selittääkseen kaikkea oppilaan ymmärryksestä ja ajattelusta. Kun oppilas kertoo suullisesti ajatuksistaan ja ideoistaan, ne eivät täysin vastaa monimutkaisia ajatuspro-

sesseja, joten opettaja tai muu kuulija ei välttämättä saa tarpeeksi informaatiota auttaakseen oppilasta oppimaan. Varsinkaan syitä sille, miksi kyseessä oleva oppilas ymmärtää asiat kertomallaan tavalla, on todella vaikea saada selville pelkällä luokkahuonekeskustelulla. [30] Luokkahuoneessa tapahtuvan keskustelun toisena kääntöpuolena on muistettava, että useimmiten varsinkin parikeskustelussa, toinen oppilaista ”leimataan” osaavaksi osapuoleksi ja toinen vähemmän osaavaksi. Tämän kaltainen jaottelu ei Lermanin [19] mukaan välttämättä vaikuta matemaattiseen osaamiseen ja siihen sisältöön, mitä oppilas tuottaisi, mutta omaan oppimiskyvykkyyden sillä voi olla merkitystä.

#### 4.3.1 Vinkkejä suulliseen kielentämiseen matematiikan opetuksessa

Oppilaat eivät välttämättä ole tottuneet keskustelemaan matematiikan tunneilla, jolloin se voi aluksi olla heille vaikeaa. Keskustelussa apuna olevia tapoja on tutkittu, ja tässä kappaleessa esitellään niistä viisi tehoikkainta, jotka auttavat saavuttamaan halutun päämäärän matemaattisen ajattelun ja oppimisen syventämisessä. Nämä viisi tapaa eivät kuitenkaan ole ainoita mahdollisia ja niitä voi soveltaa monella eri tavalla.

Ensimmäinen tapa on **”uudelleen kertominen”**: Opettaja toistaa oppilaan vastauksen ja lisää siihen kysymyksiä ikäänkuin tarkistaakseen, että oppilas on ymmärtänyt asian oikein. Samalla oppilaalta voi saada tarkempia perusteluja asiaan. Toisaalta oppilaan vastauksen uudelleen kertominen auttaa toisia oppilaita ymmärtämään asian paremmin. He myös kuulevat sen uudelleen opettajan toistaessa vastauksen, jolloin heillä on enemmän aikaa miettiä ja sisäistää asiaa. [3]

Toinen tapa keskustelun luomiseen on **”toistaminen”**. Ensimmäisen oppilaan vastauksen jälkeen, annetaan vuoro seuraavalle oppilaalle, jonka tehtävänä on toistaa toisen oppilaan vastaus omin sanoin. Tässäkin tavassa oppilailla on enemmän aikaa prosessoida vastausta. Oppilaat myös saavat osallistua keskusteluun enemmän. Toistamisen avulla myös taataan se, että jokainen oppilas kuulee käsiteltävän vastauksen. Muut oppilaat voivat ymmärtää opiskeltavaan asiaan liittyviä käsitteitä ym. uudella tavalla vertaisryhmässä tapahtuvan keskustelun myötä. [3]

Kolmas tapa lisätä keskustelua on **”perustelu”**: Oppilaat lisäävät omia perustelujaan ja päättelyitään toisen oppilaan perusteluihin. Opettaja voi jatkaa keskustelua kysymyksellä: ”Oletteko samaa vai eri mieltä ja miksi?”. Oppilaat siis vertaavat omia päätelmiään toisen oppilaan päätelmiin ja näin ollen pystyvät kertomaan ovatko samaa mieltä toisten kanssa vai eivät. On tärkeää käskää oppilaita myös perustelemaan vastuksensa, jotta opettaja voi varmistua oppilaan oikeasti ymmärtävän asian. [3]

Neljäs keskustelutapa on **”vastauksen syventäminen”**. Oppilaat saavat tilaisuuden jatkaa toisen oppilaan vastausta ja näin ollen esimerkiksi syventää vastausta tai kertoa erilaisia näkökulmia aiheesta. Toiset oppilaat saavat näin arvioida aiemmin esitetyn vastauksen oikeellisuutta. Lisäksi he oppivat keskustelemaan eri ratkaisuvaihtoehdoista. [10, 3]

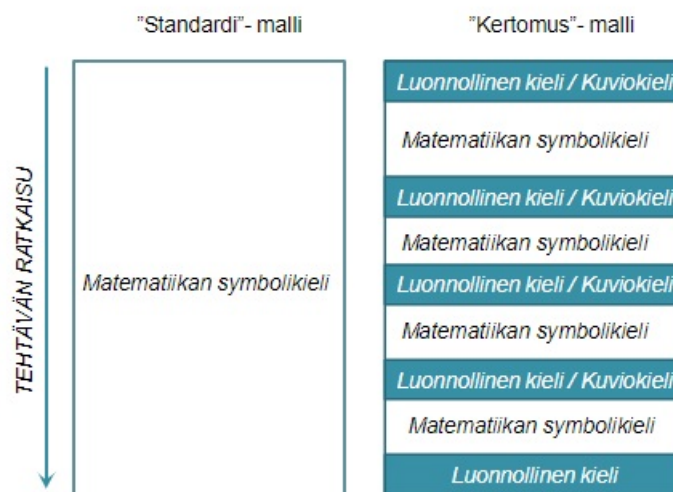
Viides tapa keskustelun lisäämiseksi on **”odottaminen”**. Yhteinen miettimistauko on hyvä tapa luoda ja ylläpitää keskustelua. Oppilaat eivät välttämättä ole sanavalmiita, varsinkaan käsitellessä heille uusia asioita, joten tauon aikana he ehtivät prosessoimaan tietojaan. Miettimisaikaa olisi hyvä antaa myös oppilaalle, jolle on jo annettu vastausvuoro. Näin hänellä on aikaa miettiä vastaukselleen perustelu. [3]

Suullisen kielentämisen ja luokkahuonekeskustelun yksi päätavoitteista on muuttaa oppilaiden näkemyksiä matematiikan kompleksisuudesta ja selkeyden puutteesta, varsinkin heidän opettellessa uutta ja monimutkaista matemaattista asiaa. Keskustelun avulla tieto rakentuu jo aikaisemmin opittujen asioiden päälle muovailen ja ahvistaen ennalta opittua. Opettaja saa myös tietoa siitä, mitä aihealueita oppilaat kokevat monimutkaiseksi, jolloin jatkon kannalta on hyödyllistä painottaa monimutkaiseksi koettuja asioita enemmän. [3, 30, 9]

## 4.4 Kirjallinen kielentäminen

Oppilaan tekemää matematiikan sanallisen tehtävän ratkaisua katsoessa, usein näkee vain laskulausekkeen, laskutoimituksia ja tuloksen tai mahdollisesti vain joitain näistä [23]. Näkyvissä on siis vain käytetyt proseduurit, jos niitäkään. Joutsenlahden [12] näkemyksen mukaan olisi tärkeää, että kirjallises- sa ratkaisussa käytettäisiin symbolikielen lisäksi kuviokieltä, matematiikan luonnollista kieltä ja mahdollisesti luonnollista kieltä (Kuva 2). Samassa tutkimuksessa Joutsenlahti on todennut, että peruskoulun oppikirjat ohjaavat oppilasta yhdenlaiseen ratkaisumalliin: muodostamaan lausekkeen ja laske- maan laskun. Suppea, symbolikielellä esitetty ratkaisu ei tue monipuolista kielenkäyttöä matemaattisen ajattelun ilmaisemisessa. Tästä syystä oppi- laan ajattelu- ja ratkaisuprosessi jäävät opettajalle tai ratkaisun tarkaste- lijalle avoimiksi [10]. Vaikka oppilaat kokevat usein kirjallisen kielentämisen työlääksi, sen vaatiessa paljon enemmän kirjoittamista kuin muutaman rivin laskulausekkeet, ovat Joutsenlahden [10] mukaan kielentämisen hyödyt niin suuria, että kielentäminen kannattaa. Kirjallisen kielentämisen etu on myös konkreettinen, kirjallinen esitys, johon voi palata uudelleen esimerkiksi ko- keeseen lukiessa tai kotitehtäviä tehdessä. Kielentäjä voi tarvittaessa myös muokata aiempaa tuotostaan. Kielentämisen seurauksena myös opittu asia voi jäädä paremmin muistiin [23, 12].





Kuva 3: "Standardi"- ja "kertomus"-mallien havainnollistus[12]

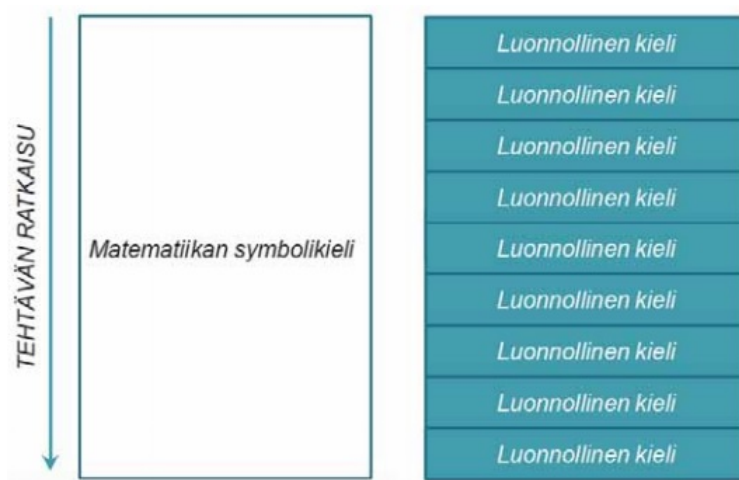
Suulliseen kielentämiseen verrattuna kirjallisessa kielentämisessä oppilaalla on enemmän aikaa jäsenellä ajatuksiaan ja rakennella ratkaisua. Kirjallinen ratkaisu on usein myös selkeämpi, joka on hyödyllistä ratkaisun lukijan kannalta. Suullisessa kielentämisessä oppilas kuitenkin saa palautteen välittömästi ja kuulee myös ratkaisun oikeellisuuden kuulijoilta, toisin kuin kirjallisen kielentämisen tapauksessa, vastaus tarkistetaan usein vasta myöhemmin. Lisäksi suullisessa vastauksessa saa vertaistukea kuulijoilta, kirjallisen kielentämisen ollessa yksilötyötä. [23, 27]

#### 4.4.1 Kirjallisen kielentämisen malleja

Joutsenlahti [12] on kehittänyt viisi kirjallisen kielentämisen mallia, joita voi soveltaa matemaattisten (sanallisten) tehtävien ratkaisuissa. Mallit ovat: "standardi"-, "kertomus"-, "kommentti"-, "tiekartta"- ja "päiväkirja"-malli.

"Standardi"-malli (Kuva 3) keskittyy vain matematiikan symbolikielen käyttöön. Se on tavanomainen malli, joka esitellään peruskoulun oppikirjoissa. Malli on yksinkertainen ja suosii yhdenlaista esitystapaa: lauseke, laskut ja lopuksi vastaus yksikköineen. Ratkaisu on persoonaton, eikä ratkaisijan tarvitse itse ymmärtää ratkaisua, vaan sen voi vain toistaa esimerkin avulla. Myöskään ratkaisun lukija tai kuulija ei saa minkäänlaista tietoa ratkaisijan ymmärryksestä. (Joutsenlahti 2009) Normaalisti juurikin kyseinen malli on laajalti käytössä oppilaiden keskuudessa, ja siihen liittyy edellä olevissa kappaleissa esiteltyjä ongelmia.

"Kertomus"-mallissa (Kuva 3) tehtävän ratkaisun perusteet kuvataan sa-



Kuva 4: ”Kommentti”-mallin havainnollistus [12]

nallisesti. Ratkaisun edetessä vaiheet kuvaillaan sanojen ja kuvioiden avulla. Esimerkiksi lyhyet väliotsikot kuvaavat tehtävän ratkaisuvaiheita, ja yleensä myös käytetyt merkinnät esitellään. Ratkaisussa yhdistellään eri kieliä (kts. kuva 1) tukemaan ja jäsentämään ratkaisun vaiheita. Samalla ratkaisuprosessi selkeytyy myös lukijalle, näin lukija saa tietoa ratkaisijan ymmärtämisestä ratkaisemassaan tehtävässä ja mahdollisia virheitä on helppo seurata. Oppikirjoissa sanallisten tehtävien malliratkaisut ovat usein ”kertomus”-mallin mukaisia.

”Kommentti”-mallissa (Kuva 4) tehtävä on ratkaistu täysin matematiikan symbolikieltä käyttäen ja sen vieressä, ikään kuin toisella sarakkeella, on ratkaisuvaiheen syyt ja perustelut luonnollisella kielellä. Mallia voidaan kutsua myös pedagogiseksi malliksi, koska opettajat usein käyttävät mallia tunneilla perustellessaan välivaiheita laskun vierelle tehtävän ratkaisemisen lomassa. [12]

”Tiekartta”-mallissa (Kuva 5) tehtävä ratkaistaan ensin vain kuvailemalla ratkaisuprosessia sanallisesti ja kuvioiden avulla. Lukija saa jo sen perusteella käsityksen ratkaisun pääpiirteistä ja tarvittavista perusteluista. Vastatämän jälkeen tehtävä ratkaistaan matemaattisesti tehtävän alussa esitellyn kuvauksen mukaisesti. Tehtävän jälkimmäinen ”matemaattinen vaihe” vastaa ensimmäisenä esiteltyä ”standardi”-mallia. ”Tiekartta”-mallissa siis täydennetään ratkaisun takana oleva ajatustyö ”standardi”-mallin ratkaisun tueksi. [12]

”Päiväkirja”-mallissa (Kuva 5) edetään pääsääntöisesti ”standardi”-mallin mukaisesti, sen enempää kirjoittamatta. Kuitenkin ratkaisijan kohdatessa ongelmallisia kohtia, hän jäsentää ja selkeyttää omaa ajatteluaan kirjoittamalla



Kuva 5: "Tiekartta"- ja "päiväkirja"-mallien havainnollistus [12].

tai kuvioita apuna käyttäen. "Päiväkirja"-mallin ensisijainen tarkoitus onkin selkeyttää ratkaisijan omia ajatuksia, ei niinkään informoida lukijaa. [12]

Kaikissa Joutsenlahden määrittelemissä ratkaisumalleissa vastaus annetaan erillisenä ja kokonaisena virkkeenä. Kun vastaus annetaan yhtenäisenä virkkeenä, oppilas joutuu itse pohtimaan yksiköt, tarkistamaan, että vastaus vastaa alkuperäiseen kysymykseen ja arvioimaan vastauksen järkevyyttä tehtävässä kuvaillussa tilanteessa. [12]

## 4.5 Esimerkkejä matematiikan kielentämismalleista

Sama tehtävä on ratkaistu kolmen eri kielentämismallin avulla.

Tehtävänanto:

Luokan kassassa on  $400e$ . Opettaja ostaa 27 junalippua. Yksi lipput maksaa  $12e$ . Kuinka paljon rahaa jää?[1]

### 4.5.1 "Standardi"-malli

$$400e - 12e \times 27 = 76e$$

Vastaus  $76e$

### 4.5.2 "Kertomus"-malli

Junaliput maksavat yhteensä:

$$27 \times 12e = 324e$$

Rahaa jää kassaan:

$$400e - 324e = 76e$$

Lausekkeena:

$$400e - 27 \times 12e = 76e$$

Vastaus: Rahaa jää  $76e$ .

### 4.5.3 ”Tiekartta”-malli

Junalippujen yhteishinta saadaan kertomalla lipun hinta lippujen määrällä ja jäljelle jäävä rahamäärä saadaan, kun vähennetään kassassa olevasta rahamäärästä junalippujen hinta

$$400e - 27 \times 12e = 400e - 324e = 76e$$

Vastaus: Rahaa jää  $76e$ .

## 5 Opettajan rooli matematiikan kielentämisessä

Tarkasteltaessa opettajan roolia matematiikan kielentämisessä on huomioitava opettajien tietämys. Ensinnäkin myös tieto opettamisesta on kompleksinen ja hyvin monimutkainen tiedonala, ja toisekseen kyseinen tieto opettamisesta on hyvin paljon riippuvainen kontekstista ja tilanteesta. Yhdessä huomioituna nämä kaksi näkemystä tarkoittavat, että tieto miten opettaa, tarkoittaa tietoa, miten opettaja tulkitsee ja soveltaa tiedon monimutkaisuutta. Matematiikan kielentämisessä on erittäin tärkeää, miten opettajat itse ymmärtävät oppilaan konseptuaalisen tiedon kehittymisen [6]. Doerrin [6] mukaan kyseisen tiedon kehittymisen huomaaminen ei ole sama asia kuin havaita oppilaan ymmärtäneen yhden tavan ajatella asiaa tai kehittäneen yhdenlaisen idean asian pohjalta.

Jotta kielentäminen saadaan luonnolliseksi osaksi matematiikan opetusta, on opetusjärjestelyt suunniteltava etukäteen niin, että kielentämistä tuetaan. Opetuksen tulee sisältää tarkoin harkittuja materiaaleja, esimerkkejä ja malleja, jotka rohkaisevat ja kannustavat oppilaita kielen käyttöön matematiikassa. Onnistuneen kielentämisprosessin seurauksena opettaja saa viitteitä oppilaiden ajatteluprosesseista arvioimalla oppilaiden toimintaa ja kielentämisessä syntyviä kuvia sekä ideoita [18]. Näiden eri representaatiodien avulla voidaan tulkita konseptuaalista ja proseduraalista tietoa. Lisäksi se voi johtaa kehittämään opetuskeinoja, joilla voidaan auttaa ja edistää oppilaiden oppimista [6]. Opettajan tulisi myös kannustaa oppilaita käyttämään arkipäiväistä kieltä matematiikan tunneilla.

Oppilasryhmien ollessa suuria, ei suullinen kielentäminen ole mitenkään mahdollista läheskään kaikkien kohdalla yhden matematiikan tunnin aikana. Sen takia korostuu vihkoihin tehtävän kirjallisen kielentämisen merkitys. Oppilaita tulisi ohjata ja opastaa selostamaan sekä perustelemaan omia ratkaisujaan vaihe vaiheelta, tällä tavalla ainakin proseduurit olisivat näkyvissä, vaikka konseptuaalisesta tiedosta voidaan saada vain viitteitä. Omia ratkaisujaan oppilas voi jäsentää esimerkiksi pienien väliotsikoiden avulla. Tällöin opettajalla on mahdollisuus arvioida käytettyjen käsitteiden ja sisältöjen oikeellisuutta ja niiden ymmärtämistä. [10]

Opettajan tulisi kiinnittää huomiota myös palautteeseen, jota antaa oppilaalle hänen tuotokseensa liittyen. Tarkoituksenmukainen palaute auttaa oppilasta parhaiten. Palautteesta tulee ilmetä oppilaalle, mitä hän on osannut, mitkä asiat hän on tehnyt hyvin ja missä olisi vielä korjattavaa tai parantamisen varaa. Jos palaute ei ole tarpeeksi informatiivista oppilaalle, hän ei pysty kehittämään toimintaansa sen avulla, eikä muokkaamaan mahdollisia virheellisiä käsityksiä. [18]

## 5.1 Voiko matemaattista ajattelua opettaa?

Burton [2] on todennut matemaattisen ajattelun olevan luonnollinen työväline luokitella, verrata, yhdistellä ja muunnella ulkomaailman tietoa, jolloin lapsilla on sitä jo kouluun tullessaan. Tällöin luontaista matemaattista ajattelua voidaan hyödyntää silloin, kun opettajat ovat tietoisia siitä ja tietävät miten se harjaantuu. Oppiminen ei tapahdu pelkästään tietoa syöttämällä tai harjoittelemalla, vaan samaan aikaan tarvitaan reflektiota, että mitä on tehty ja miksi. Oppilaiden matemaattisen ajattelun laatuun ja heidän reaktioihinsa/vastauksiinsa matematiikan ongelmissa vaikuttavat heidän aiemmat kokemukset. Kun asiat on jo opetettaessa perusteltu ja selitetty hyvin, voivat valmiudet käyttää samoja tietoja olla paremmat. Samaa tapaan huonojen kokemusten takia matemaattisen ajattelun laatu voi myös heikentyä.

Jos oppilaan on havaittu olevan hyvä jossain asiassa, esimerkiksi luokittelussa alemmilla luokilla, kuulostaisi järkevältä harjoittaa taitoa ja esitellä vaihtoehtoisia tapoja kehittää omia taitojaan. Tämä onnistuu kuitenkin vain, jos oppilaan vahvuudet ovat jo etukäteen tiedossa. Jos niitä ei tiedetä, eikä niistä ole keskusteltu tai niitä ei ole tutkittu, niin tällaisia harjoituksia ei pystytä tarkasti määrittämään. Kun erilaisia mahdollisuuksia täsmentämiseen, otaksumien arvailemiseen, yleistämiseen ja vakuuttumiseen tarjoillaan oppilaille, he voivat pystyä lähestymään omaa ajatteluaan syvemmin ja erilaisista näkökulmista. Tällöin oppilaille vähitellen muodostuu työkaluja, joiden avulla he pystyvät rakentamaan vastauksiaan ja valmiuksiaan matemaattisiin ongelmiin. Tässä kohtaa kielentämistä tarvitaan. Oppilaille voi ol-

la hyödyllistä kirjoittaa ratkaisun lomaan tuntemuksiaan. Tässä tapauksessa on myös mahdollisuus tiedon konseptualisoimiseen. Opettajan esittämien tai tehtävänannossa esitettyjen oikeanlaisten kysymyksien avulla sanojen käyttö harjaantuu ja oppilaat saattavat näin käyttää samoja sanoja myös omissa vastauksissaan. Jos oppilas on jumissa tehtävän kanssa, eikä tiedä miten edetä eteenpäin, on se hyvä myöntää itselleen, jolloin ajatusprosessi lähtee uudelleen alusta. Tarvitaan erilainen täsmentäminen, erilaiset hypoteesit yms. eli erilaisia ratkaisuun johtavia reprenstaatioita ja proseduureja. Käytännössä siis tehtävän ratkaiseminen on tietynlaista yritys-erehdys-toimintaa. [2]

Yksityisesti itselleen kysymyksien luominen ja niiden välisten implikaatioiden tutkiminen voi olla luonnollinen tapa matemaattisen ajattelun laajentamisessa. Tällöin he havaitsevat ja pohtivat odottamattomia ja vaihtoehtoisia tulkintoja ja voivat miettiä piilomerkityksiä. Kaiken kaikkiaan he oppivat testaamaan omia olettamuksiaan ja reflektivat mitä he ovat saaneet selville. [2]

Avain oppilaiden matemaattisen ajattelun havaitsemiseen ja sen käyttöön on sellaisen ilmapiirin luomisessa, joka rakentaa luottamuksen kysyä, haastaa ja reflektoida. Tällainen ilmapiiri sisältää ja kannustaa muun muassa olettamuksien kyseenalaistamiseen, erilaisista tarkoituksista keskusteleminen, kysymyksien esittämiseen, hypoteesien luomiseen, vakuuttavien todistuksien argumentoimiseen, itsekriittisyyteen ja halukkuuteen muuttamaan omia näkemyksiään. Opettajan esittämällä kysymyksillä ajatellaan myös olevan vaikutusta tämän ilmapiirin ylläpitämiseen. Tällaisia kysymyksiä ovat esimerkiksi: ”Miksi ajattelet näin? Mitä huomaat? Mitä jos...?”. [2]

Edellä mainitut keinot kuitenkin saattavat lisätä vain oppilaiden tietoisuutta matemaattisista asioista, ilman ajattelun syventymistä. Tietoisuus on kuitenkin silta, joka yhdistää erillisiä tiedonalueita, informaatiota, kokemuksia, tekniikoita ja ulkopuoliseen maailmaan liittyviä asioita. Pelkkä tietoisuuden lisääntyminen ei siis ole haitaksi. Tietoisuuskaan ei kuitenkaan lisäännä itsestään vaan sitä pitää rakentaa harkitusti. [2]

## 6 Oppimisen arviointi matematiikan kielentämisen avulla

Opettajan näkökulmasta kielentäminen on erittäin hyödyllinen työkalu. Sen avulla pystyy arvioimaan, onko oppilas ymmärtänyt asian oikein vai onko jossain vaiheessa mahdollisesti muodostunut väärinymmärryksiä. Opettaja pystyy myös arvioimaan konseptuaalisen tiedon kehittymistä jossain määrin. Kielentämistehtävä voi auttaa opettajaa näkemään tehtävän uudesta näkö-

kulmasta, ja jopa kehittää opettajan opetusta kyseisestä aihealueesta jatkossa. [2, 8]

## 6.1 Kirjallinen ja suullinen kielentäminen arvioinnin tukena

Oppimisen arviointi on tärkeä osa opetustyötä. Oppimisen arvioinnin tulisi kuitenkin ennemmin kohdistua asioiden ymmärtämiseen ja opiskelutyylihin, kuin pelkkään numeroilla tapahtuvaan arvostelemiseen. Pedagogisesti tärkeimmät arviointimuodot keskittyvät opetus-, opiskelu- ja oppimisprosesseihin [2]. Monipuolinen kirjoittaminen voi olla apuna opettajan tulkitessa oppilaiden vastauksia [13]. On kahdenlaisia arviointitekniikoita, joissa kirjallinen ja suullinen kielentäminen on apukeinona. Tekniikoilla voidaan arvioida joko oppilaan kyvykkyyttä matematiikassa eli osallistumista, kiinnostusta ja sitoutumista matematiikkaan ja sen opiskeluun tai oppimisen sisällöllistä puolta eli oppilaan ymmärrystä ja sisällöllistä tietoutta. [17]

Esimerkkinä tällaisista tekniikoista muutama, joita Adu-Gyamfi [17] on teoksessaan esitellyt: Vertaisarviointi, jossa oppilaat arvioivat kirjallisesti toisen oppilaan laatimaa tehtävän ratkaisua. Näin opettaja pystyy arvioimaan sekä arvioijan että alkuperäisen tehtävän ratkaisijan osaamista.

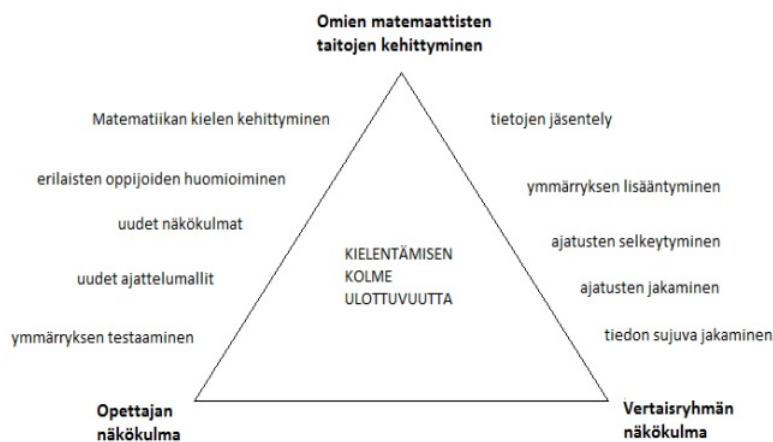
Kaksivaiheinen testi, on tavanomainen testi, joka toteutetaan kahdessa vaiheessa. Opettaja arvioi tehtävät ja antaa kirjallisen palautteen ensimmäisessä vaiheessa, jonka jälkeen toisessa vaiheessa oppilaiden tehtävänä on kirjoittaa vielä vastaus opettajan palautteisiin. Tämän arviointimenetelmän avulla sekä oppilas että opettaja saavat informaatiota, miten tietty aihealue on ymmärretty ja missä asioissa on tullut virheitä.

Oppimispäiväkirjan kirjoittaminen auttaa oppilaita jäsentämään ajatteluaan tietystä asiasta, säännöstä tai matemaattisesta prosessista. Oppimispäiväkirja on hyvin informatiivinen, kuitenkin hieman lisätyötä aiheuttava, arviointikeino opettajalle.

”Oman esimerkin keksiminen” käsiteltävästä aiheesta on sisällöllistä osaamista arvioiva tehtävä. Oppilaat saavat esimerkkiä keksiessään sekä analysoida matemaattista aihetta että esittää osaamansa tiedon esimerkin luomisen avulla. Esimerkin vaikeustason ja kekseliäisyyden avulla voidaan helposti arvioida oppilaiden ymmärryksen tasoa.

Oppilaiden syvempää ymmärrystä voidaan tulkita myös kuvaajien, diagrammien ja kuvien tuottamisen avulla. Kun oppilas saa vapaat kädet tehdä aiheeseen liittyviä kuvioita tms., niin siihen liittyvä prosessi ja itse tuotos kuvaavat oppilaan omaa käsitystä aiheesta. [17]

Oppimisen sisältöä arvioivia menetelmiä on tietenkin monia muitakin,



Kuva 6: Kielentämisen ulottuvuudet [28]

mutta tässä yllä esiteltynä oli muutama kielentämistä hyödyntävä tekniikka. Hieman muokkaamalla tekniikoita saa kevennettyä ja muutettua eri luokka-asteille sopiviksi.

## 7 Kielentämisen hyötyjä

### 7.1 Kenelle kielentämisestä on hyötyä?

Kysymystä voidaan tarkatella kolmesta eri näkökulmasta: opiskelijan omasta näkökulmasta, vertaisryhmän näkökulmasta ja opettajan näkökulmasta [15].

Opiskelijoiden omasta näkökulmasta kielentäminen auttaa selkeyttämään opiskeltavaa asiaa, heidän jäsennessään ja selittäessään vaikeita asioita tulla ja selkeällä kielellä. Tieto saattaa siis muuttua konseptuaaliseksi ja proseduurit voivat automatisoitua harjoittelun tuloksena. Myös erilaisia representaatioita voi muodostua ja vanhoja väärinymmärryksiä voidaan pystyä korjaamaan. Oppilaat myös pysyvät kärryllä omasta oppimisestaan. Kun oppilas reflektoi omin sanoin oppimaansa, hän identifioi asioita helpoiksi tai vaikeiksi. Tunnistaessaan itselle vaikeat asiat, voi niihin perehtyä jatkossa tarkemmin. Tämä hyöty saavutetaan esimerkiksi jo siinä tapauksessa, kun oppilas kirjoittaa opettajalle kirjallisen viestin epäselvästä asiasta. Kielentäen tehdyt tehtävät myös ovat hyödyllisiä asioita kerratessa ja kokeeseen lukiessa. [5, 2]

Kielentäminen on hyödyllistä oppilaalle myös ratkaisuprosessin selkeyttämisessä. Kun oppilas kirjoittaa aluksi tehtävässä annetut tiedot ylös ja mihin tehtävässä etsitään ratkaisua, laskutoimitukset tehtyään, on oppilaan help-



po palata tehtävän alkuun tarkistamaan, että tehtävänannossa annetut faktat on huomioitu ja, että oikeaan kysymykseen on vastattu[5]. Kun oppilaat ovat tottuneet kielentämiseen, he pysyvät kärryillä omassa osaamisessaan, jolloin myös oman opiskelun itsearviointi helpottuu. Oppilaat oppivat millainen tekniikka sopii heille ja mikä tukee heidän oppimistaan. Kun oppilaila on mahdollisuus vaikuttaa omaan oppimiseensa, myös opiskelumotivaatio nousee. Tässä kyse on Kilpatrickin ym. määrittelemästä yritteliäisyydestä. Usko omaan kehitykseen ja omiin kykyihin kasvaa, kun oppilaat saavat onnistumisia. [18, 16]

Oppilaille on myös hyödyllistä kuvailla oppimisprosessia kirjoittaen. Ilman kirjoittamista oppiminen tapahtuu vain arvioimalla tehtävää ja toteuttamalla laskutoimitus. Kirjoittamisen myötä tehtävää tarkastellaan syvemmin ja tietoa järjestellään ennen laskun toteuttamista. Tehtävät pitää siis muodostaa niin, että oppilaat joutuvat syventymään tehtävänantoon ja organisoimaan siinä kerrottavia tietoja ja miettimään otaksumiaan ja odotuksiaan, sekä todistamaan niitä todeksi eli käyttämään Burtonin (1984) määrittelemiä matemaattisen ajattelun prosesseja. Vielä tehtävän ratkaisemisenkin jälkeen tehtävää pitää ajatella uudelleen. Esimerkiksi tehtävän ratkaisemisen jälkeen voisi kirjoitustehtävänä vielä olla reflektointia. Esimerkkialoitus tällaiselle tehtävälle voisi olla: ”Nähdessäni tehtävän, ensimmäinen reaktioni oli...”. [5, 33]

Vertaisryhmän näkökulmasta kielentämisen myötä pystyy ymmärtämään paremmin toisten laskijoiden ratkaisuja ja vertaamaan omia päätelmiään muiden ratkaisuihin. Tehtävistä keskusteleminen on myös helpompaa, kun opiskelijat ymmärtävät toisiaan. Matematiikan laskuissa usein on jopa vastausta tärkeämpää ratkaisuun kuljettu matka ja siihen pääseminen. Myös uusia näkökulmia voi saada vertaisryhmän avulla. [28, 2]

Opettajan näkökulmasta kielentämisen hyödyllisyys näkyy oppilaiden selittäessä omia matemaattisia ideoitaan. Tällöin opettaja saa tietoa oppilaiden ymmärryksestä. Opettaja pystyy arvioimaan formatiivisesti oppilaiden oppimista. Kirjoituksien perusteella voidaan arvioida oppilaiden ymmärrystä sisällöllisesti, algoritmien hallintaa ja ongelmanratkaisutaitoja sekä oppilaiden asenteita ja tunteita. Esimerkki sisällöllistä osaamista arvioivista tehtävistä: ”Määrittele yhdensuuntaisuus omin sanoin.” tai ”Miten perustelet, että  $\frac{1}{4}$  on suurempi kuin  $\frac{1}{5}$ .” tai ”Mitkä olivat tämän päivän tunnin pääpointit?”

## 7.2 Kielentämisen haasteita

Kielentämiseen liittyy myös haasteita. Ensimmäisenä mieleen nouseva kysymys kielentämiseen liittyen on, että miten voidaan sanoa mitään oppilaiden ymmärryksestä suullisen tai kirjallisen kielentämisen yhteydessä. Onko se

lainkaan mahdollista tai varsinkaan, onko ymmärryksen tasoa mahdollista mitata. Toisen oppilaan kanssa tapahtuvassa keskustelussa voidaan pohtia, vaikuttaako keskustelu ja yhteistyö näkyvällä tasolla oppimisessa ja vaikuttaako keskusteleminen oppimiseen aina myönteisesti molempien keskusteluun osallistuneiden oppilaiden kohdalla. [30]

Konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon kannalta kielentämisellä ei ole löydettävissä hyötyjä, jos oppilaalla ei ole vielä konseptuaalista tai proseduraalista tietoa aihealueesta. Tällöin kielentäminen ei yksinkertaisesti ole kannattavaa. Toisaalta esimerkiksi esimerkkejä jäljittelemällä proseduraalinen tieto voi vähitellen kasvaa. Omia representaatioita oppilaat pystyvät kehittämään ilman kielentämistäkin, tosin esimerkiksi ajatustensa muuttaminen sanoiksi voi selventää myös omaa ajattelua. Joissain tapauksissa oppilas voi hallita käsitteen ja jopa ymmärtää asian, mutta ei pysty antamaan verbaalista esitysmuotoa [16].

Toinen suulliseen kielentämiseen liittyvä ongelma tulee esiin toisen oppilaan ollessa selkeästi heikommalla tasolla kuin toisen. Miten tässä tilanteessa heikomman oppilaan osaamista voitaisiin parhaalla mahdollisella tavalla lisätä ja onko se mahdollista toisen oppilaan kanssa keskustellessa. Kuitenkin joitan аспектеjä väärinymmärryksistä voidaan keskustelunkin perusteella tulkita, mutta ovatko nämä tulkinnot riittäviä auttamaan oppilasta oppimisessa. Varsinkaan reaktioiden ja vastauksien syitä on todella vaikea selvittää analysoimalla keskustelua. [30, 2]

Varsinkin kirjallinen kielentäminen vaatii oppilailta enemmän keskittymistä, aikaa ja ajattelun reflektointia. Ylipäätään, kun ajatukset pitää kirjoittaa ylös, on se huomattavasti työläämpää kuin asioiden pohtiminen vain mielessään. Työmäärän lisääntyminen ei useinkaan innosta oppilaita, joten kirjallinen kielentäminen voi jäädä vähäiseksi. Tämän takia kielentäminen vaatiikin harjoittelua ja ohjaamista oikeaan tapaan, jotta siitä tulisi tehokasta. [23]

Leen [18] mukaan kielentämisen käyttäminen ei ole aina perusteltua sen hyödyistä huolimatta. Kirjallinen kielentäminen ei ole hyödyllistä esimerkiksi yksinkertaisia laskuja laskettaessa tai silloin kuin verbaalinen keskustelu opettajan tai luokkatoverin kanssa selkeyttäisi ajatuksia paremmin. Jos kirjoittamista vaaditaan "pakollisena" voi se myös joissain tapauksissa keskeyttää oppilaan ajatustyön ja näin ollen vain hidastaa ajatusprosessia. Vastuu havaita varsinkin kirjallisen kielentämisen hyödylliset käyttökohteet jää opettajalle.

Kirjoittaminen ei myöskään innosta oppilasta, joka kokee olevansa huono kirjoittaja muissakin aineissa tai vaihtoehtoisesti, jos oppilas ei opiskele matematiikkaa omalla äidinkielellään. Tällöin kuitenkin vähäisetkin sanat laskulausekkeiden joukossa kuvaavat oppilaan ymmärtämistä aiheesta. Kai-

kenlainen kielentäminen on sallittua, eikä siinä varsinaisesti ole oikeaa tai väärää tapaa.

Arvioinnin yhteydessä arvioijan on muistettava, että kirjallinen ajatus on aina hieman erilainen kuin alkuperäinen. Pitääkin huomioida mahdolliset tulkinnanvarat oppilaiden kielenntetyistä ajatuksista.[19] Arviointi perustuu edelleen opettajan tulkintaan oppilaan tuotoksesta, joten siihen ongelmaan ei kirjallisella kielentämiselläkään täysin saada ratkaisua. Kuitenkin kielentämistä harjoittelemalla myös tulkinnanvaraisuus pienenee [23]. Arviointi saattaa olla myös opettajille hieman työläämpää verrattuna pelkkiin laskutoimituksiin vastauksineen. Tarkistaminen vie enemmän aikaa, mutta toisaalta oppilaiden ymmärtämistä ja osaamista saadaan arvioitua paljon kattavammin.

Kielentäminen ei myöskään huomioi oppilaiden aikaisempia kokemuksia, omaa sitoutuneisuutta ja kiinnostusta matematiikan opiskeluun, jotka kuitenkin ovat avainasemassa oppimisessa. [19]

## 8 Pohdintaa

Nykypäivän koulumaailmassa matematiikan opetuksen on kehityttävä koko ajan, kun tietotekniikka kehittyy ja muuttaa matematiikan opiskelua. Laskinohjelmistojen avulla pystytään mekaanisesti laskemaan laskutoimitukset, ja yksinkertaisimmissa tehtävissä laskin tekee työn, jolloin laskijan ei tarvitse ajatella asiaa lainkaan. Tämän takia onkin mietittävä, miten matematiikan opetus tukee matematiikan oppimista myös tulevaisuuden osajille. Kun mekaaninen laskeminen ei enää vaadi niin paljon, onkin varsinkin ylioppilaskokeissa välivaiheiden selittäminen ja perustelu saanut enemmän painoarvoa [35]. Asioiden ymmärtäminen ja sen ilmaiseminen näkyy silloin laskimen käytön rinnalla. Kielentämistä onkin tarjottu ratkaisuksi tähän muutokseen. Kielentämistä on opetuskokeilujen ja tutkimuksien myötä suositeltu yhä enemmän opetuksen tueksi [28].

Käsitteet, tieto, ymmärtäminen ja ajattelu ovat linkittyneet toisiinsa sillä tavoin, että niiden oppiminen, opettaminen tai tutkiminen erillisenä objektina on melkein mahdotonta. Kielentäminen ei ainakaan kovin selkeästi anna apua tai hyötyä seuraaviin ongelmiin: 1) oppilaalla ei ole sopivaa tietoa käytettäväksi, 2) tietoa on, mutta se ei aktivoidu tarkasteltavan tehtävän kohdalla tai 3) tieto aktivoituu, mutta sitä ei osata soveltaa tarkoituksen mukaisesti [8]. Tilanteessa, jossa oppilas on esimerkkien avulla oppinut proseduurit ulkoa ilman koseptuaalisen tiedon kehittymistä, tehtävää kielentäessään oppilas kirjoittaa saman luettelon paperille, jolloin ymmärryksen syventymistä tai representaatioiden linkittymistäkään tapahdu. Kirjallisuudessa ei ollut

löydettävissä tähän näkökulmaan vastauksia.

Tässä tutkimuksessa päätavoitteena oli esitellä kielentämistä ja pohtia, miten kielentämisestä esitetyt hyödyt liittyvät eri matemaattisen ajattelun osa-alueisiin. Kielentäminen tukee matemaattisen ajattelun kehittymistä, kuten tutkimuksessa todetaan, mutta esiin nousee myös haasteita, joita ei ole kirjallisuudessa käsitelty. Matemaattinen tieto tai ajattelu ei harjaannu kielentämisen avulla ilman opetettavan asian oppimista. Kielentämisen on tutkittu auttavan oppilasta jäsentämään ajatteluaan ja syventämään ymmärrystään. Kielentäminen lisää myös kommunikaatiota ja vertaistukea luokkahuoneissa. Opettajalle kielentäminen tarjoaa monia hyötyjä niin oppimisen arviointiin kuin opetuksen suunnitteluunkin. Myös opetussuunnitelmat kehottavat ajattelutaitojen kehittämiseen, joten kielentäminen voisi olla ratkaisu siihenkin vaatimukseen.

Olisi mielenkiintoista nähdä tai päästä toteuttamaan kielentämiseen liittyvää opetuskokeilua. Tutkimuksia lukiessani on mielenkiinto herännyt, ja tämän tutkimukseni jälkeen ikään kuin teoria kielentämisestä on jo hallussa. Seuraava etappi olisi siirtää teoria käytäntöön.

Kielentäminen voi tuntua oppilaista työläältä tottumattomuuden takia. Kuitenkin erilaisten toimintatapojen ja harjoittelun seurauksena, jokaisen luulisi löytävän itselleen sopivan tavan kielentää niin suullisesti kuin kirjallistekin ennalta määritellyissä tilanteissa. Kaikki tilanteet eivät ole relevantteja kielentämisen käytön kannalta. Opettajan suunnalta tuleva kannustaminen ja ohjaaminen on tässäkin asiassa erittäin tärkeää.

Kielentämisen hyödyt eivät rajoitu pelkästään koulumaailmaan, jolloin sitä koulussa harjoittamalla voi olla positiivisia merkityksiä jatkossa. Nykyään lähes kaikissa työyhteisöissä työskennellään enemmän tai vähemmän tiimeissä. Tällöin jokaisen tiimin jäsenen on tehtävä oma osuutensa töistä, ja myös heidän on myös pystyttävä esittämään oma osuutensa muille tiimin jäsenille. Oman ajattelun kielentäminen on siis keskeinen osa myös tiimityöskentelyä. Tähän valmiuteen keskitytään kouluissa enemmän muiden oppiaineiden kuin matematiikan tunneilla. Sama sääntö pätee kuitenkin myös matemaattisilla aloilla työskenteleville. Matematiikan osaaajan pitää usein osata kielentää omaa ajatteluaan ja päätelmiään jopa useammalla kuin yhdellä luonnollisella kielellä. [10]

## Lähteet

- [1] K. Asikainen, H. Fällden, K. Nyrhinen, P. Rokka & p. Vehmas: *Tuhat-taituri 6 opettajan opas*. Otava, Helsinki, 2006.
- [2] L. Burton: *Mathematical thinking: The struggle for meaning*. Journal for research for mathematics education. Volume 15. Number 1. National Council of Teachers of Mathematics, 1984.
- [3] S. Chapin, C. O'Connor & N. Canavan Andersson: *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn*. Math Solutions, Sausalito, California, USA, 2009.
- [4] A. Chronaki & I. Christiansen: *Challengin perspectives on mathematics classroom communication*. IAP-Information Age, Greenwich, Connecticut, 2005.
- [5] J. Countryman: *Writing to learn math*. NH: Heinemann, Portsmouth, 1992.
- [6] H. M. Doerr: *Examining the tasks of teaching when using students' mathematical thinking*. Educational Studies in Mathematics (2006) 62: 3. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-4437-9>
- [7] L. Haapasalo: *Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää*. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.) *Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen*, 2, 2004.
- [8] L. Haapasalo & D. Kadijevich: *Two types of mathematical knowledge and their relation*. Journal für Mathematik-Didaktik, 21(2), 139-157. 2000.
- [9] R. Jamison: *Learning the Language on Mathematics*. Language and Learnin Across the Disciplines, Volume 4, Number 1, 2000.
- [10] J. Joutsenlahti: *Kielentäminen matematiikan opiskelussa*. Teoksessa Virta Arja & Mattila Outi *Opettaja, asiantuntijuus ja yhteiskunta* (Aine-didaktinen symposium 7.2.2003). Turun opettajakoulutuslaitos, Turku, 2003.
- [11] J. Joutsenlahti: *Lukiolaisen tehtävääorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Turun yliopisto, Turku, 2005.

- [12] J. Joutsenlahti: *Matematiikan kielentäminen kirjallisessa työskentelyssä*. Teoksessa Kaasila R. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Rovaniemellä 7.-8.11.2008. Lapin yliopistopaino, Rovaniemi, 2009.
- [13] J. Joutsenlahti & P. Kulju: *Kieliteoreettinen lähestymistapa koulumatematiikan sanallisiin tehtäviin ja niiden kiennettyihin ratkaisuihin*. Teoksessa Ropo, E., Silfverberg, H. & Soini, T. Toisensa kohtaavat ainedidaktikat: ainedidaktiikan symposiumi Tampereella 13.2.2009. Tampereen yliopisto, Tampere, 2010.
- [14] J. Joutsenlahti & K. Rättyä: *Kielentämisen käsite ainedidaktisissa tutkimuksissa*. Teoksessa Kauppinen M., Rautiainen M. & Rannanen M. Rajaton tulevaisuus. Kohti kokonaisvaltaista oppimista. Ainedidaktiikan symposium Jyväskylässä 13.-14.2.2014. Jyväskylän yliopisto, Jyväskylä, 2015.
- [15] J. Joutsenlahti, H. Sarikka, J. Kangas & P. Harjulehto: *Matematiikan kirjallinen kielentäminen yliopiston matematiikan opetuksessa*. Proceedings of the 2012 Annual Conference of Finnish Mathematics and Science Education Research Association, 2012.
- [16] J. Kilpatrick, J. Swafford & B. Findell: *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics*. National Research Council, Washington DC, USA, 2001
- [17] K. Adu-Gyamfi, M.J. Bosse & J. Faulconer: *Assessing Understanding Through Reading and Writing in Mathematics*. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 2010.
- [18] C. Lee: *Language for Learning Mathematics: Assessment for Learning in Practice*. Open University Press, Berkshire, England, 2006.
- [19] S. Lerman: *Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics* Educational Studies in Mathematics (2001) 46: 87. <https://doi.org/10.1023/A:1014031004832>
- [20] J. McKendree, C. Small, K. Stenning & T. Conlon: *The role of representation in teaching and learning critical thinking*. Educational review, 54(1), 57-67. 2002.

- [21] T. Meaney: *Mathematics as text* Teoksessa A. Chronaki & I. Christensen. Challenging perspectives on mathematics classroom communication. IAP-information Age, Greenwich, Connecticut, 2005.
- [22] C. Morgan: *Language in Use in Mathematics Classrooms: Developing Approaches to a Research Domain* Educational Studies in Mathematics (2000) 41: 93. <https://doi.org/10.1023/A:1003891809328>
- [23] C. Morgan: *The Place of Pupil Writing in Learning, Teaching and Assessing Mathematics*. Teoksessa P. Gates. Issues in Mathematics Teaching. RoutledgeFalmer, London and New York, 2001.
- [24] Opetushallitus 2014, peruskoulun opetus-suunnitelman perusteet 2014 [https :  
//www.oph.fi/download/163777\\_perusopetuksen\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2014.pdf](https://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf) viitattu 1.2.2019.
- [25] Opetushallitus 2015, lukion opetussuunnitelma perusteet 2015 [https :  
//www.oph.fi/download/172124\\_lukion\\_opetussuunnitelman\\_perusteet\\_2015.pdf](https://www.oph.fi/download/172124_lukion_opetussuunnitelman_perusteet_2015.pdf) viitattu 1.2.2019.
- [26] R. Panasuk. *Three phase ranking framework for assessing conceptual understanding in algebra using multiple representations*. Education 131(2). 2010.
- [27] D. Pimm: *Speaking mathematically:communication in mathematics classroom*. Routledge & Kegan Paul, London, 1987.
- [28] H. Sarikka: *Kielentäminen opetuksen ja oppimisen tukena*. Matematiikan diplomityö, Teknis-luonnontieteellinen koulutusohjelma, Tampereen teknillinen yliopisto, 2014.
- [29] A. Sfard: *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational studies in mathematics (1991) 22: 1. 1–36.
- [30] A. Sfard: *There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning*. Educational Studies in Mathematics (2001) 46: 13. <https://doi.org/10.1023/A:1014097416157>
- [31] R. Sternberg: *What is mathematical thinking?* Teoksessa Sternberg R. & Ben-Zeev T. The nature of mathematical thinking. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, 1996.

- [32] T. Tossavainen: *Matematiikan kieliaspekti ja matematiikkakuva*. Teoksessa Niikko A., Pellikka I. & Savolainen E. Oppimista, opetusta, monitieteisyyttä. Kirjoituksia Kuninkaankartanonmäeltä. Joensuun yliopisto, Joensuu, 2007.
- [33] V. Urquhart: *Using Writing in Mathematics to Deepen Student Learning*. McRel, Denver, 2009.
- [34] Wikibooks: [https : // fi.wikibooks.org/wiki/Matematiikka/Johdanto\\_matematiikkaan](https://fi.wikibooks.org/wiki/Matematiikka/Johdanto_matematiikkaan) (viitattu 4.2.2019)
- [35] Ylioppilastutkintolautakunta 2018 [https : // www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston\\_tiedostot/Hyv\\_vast\\_piirt/FI\\_2018\\_K/2018](https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Hyv_vast_piirt/FI_2018_K/2018) viitattu 30.1.2019